BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXIII
E
12
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

FRANCISCI XAVERII

AYNSCOM

ANTVERPIANI

E SOCIETATE IESV,

EXPOSITIO AC DEDVCTIO GEOMETRICA

QVADRATVRARVM CIRCVLI,

R. P. GREGORII A S. VINCENTIO

EIVSDEM SOCIETATIS;

CVI PRÆMITTITVR

LIBER DE NATVRA ET AFFECTIONIBVS,

RATIONVM

AC PROPORTIONVM GEOMETRICARVM



ANTVERPIÆ,

Apud IACOBVM MEVRSIVM.

ANNO M. DC. LVI.

Digitized by Google

MARIÆ

SINE LABE CONCEPTÆ,

DEIPARÆ

SEMPER VIRGINI,

OMNIS GRATIÆ AC MISERICORDIÆ

MATRI

IN

ÆTERNI MONVMENTVM AMORIS,

SE, SVAQVE OMNIA

D. D. C.

FRANCISCVS XAVERIVS AYNSCOM

SOCIETATIS IESV.

LECTORI GEOMETRÆ.

NONVS iam annus eſt ex quo opus Geometricum R.P. Gregorij à S. Vincentio, quod de circuli & hyperbolæ dimenſione inſcribit, ſummo Geometriæ bono, & doctorum hominum plauſu, in lucem prodiit: quod, quia non argumento tantum ſuo ſpectabile, ſed incredibili materiarum varietate admirabile, adinuentionum ſubtilitate & demonſtrationum ſoliditate nulli ſecundum, omnium in ſe oculos conuertit, ſtudia excitauit, animos ad ſcribendum dedit. fuere, qui illud, ſæculi vnius laborem eſtimarent: alij, tanti operis Auctorem, in Conicis quidem Magno illo Apollonio, in ſolidis Archimede non minorem, in cæteris verò, etiam non datâ quadraturâ, nulli parem iudicabant: quæ licet ſint veriſſima, ea tamen viri eſt modeſtia, vt huiuſmodi encomia nunquã ſine rubore audiat aut legat; ea animi iudiciique etiam in rebus propriis æquitas, vt non ſolum quadraturas ſuas examinari, oppugnari non ægre ferat, ſed vt veritas eluceſcat magis, plures ad ſcribendum animarit ipſe, & ſcriptis ad eos litteris hortatus ſit. Porro eos, ſpartam illam qui ſuſcipere, in duas claſſes diſtinctos video. alij, quod Auctor per nouas diſſimilium rationum proportiones, & proportionum proportionalitates, viam ſibi ad quadraturas ſternat; totum quod de proportionibus eſt argumentum, acſi hoc ſaluo, ſalua quoque conſiſtat quadratura, aut euerſo, & illa ſit euerſa, ſibi examinandum aſſumpſere: alij relictis proportionibus, & illarum veritate ſuppoſitâ, propius ipſam aggreſſi quadraturam, propoſitiones illas examini ſubiecere à quibus illa immediatè dependet. Qua in re, ſolidius reliquis, verſati ſunt, Clariſſ. Dominus Chriſtianus Hugenius, Eruditiſſimique viri, Adrianus Auzotius, Alexius Syluius, & R.P. Vincentius Leotaudus S.I. Geometra egregius: qui licet ſpe ſuâ falſi, & ſcopum quem ſpectabant vnicè, mini-

me

me attigere, vt ſequentes edocebunt libri, eâ certe in re geometrica verſati ſunt methodo, quæ Geometras decet. vnde illorum conatus Auctori non ſolum non diſplicuit, vt multum ſe debere illis fateatur perlubenter: ego certè, totum huius operis argumentum, iiſdem debere me, nunquam diffitebor: in quo, quid potiſſimum ſpectarim, quid à me factum ſit, paucis accipe.

Rationum ac proportionum geometricarum natura & affectiones, primi libri argumentum eſt: quod quidem more Euclidæi elementi, continuatâ propoſitionum ac demonſtrationum ſerie, omiſſis controuerſis, deductum voluiſſem, ſed quia in hac parte iis debitor eram, qui non tantum librum octauum operis Geom. qui de proportionibus agit, ſed Euclidem & totam antiquorum Geometriam, euertere conati ſunt, veram antiquorum de proportionibus doctrinam ita ſtabilire debui, vt illi oppoſitæ adeoque falſæ, fundamenta penitus eâdem operâ conuellerem.

Primam quadraturam iuxta Auctoris mentem & genuinum ſenſum exponit liber ſecundus; oſtenditque, quid, & quâ methodo ex partialium rationum æquimultiplicatione, de totalibus, & ab his, pro quadratura inferri & legitime concludi poſſit ac debeat: dein omnibus ſatisfacit argumentis quibus prima auctoris quadratura, impetita fuit.

Quadraturas reliquas tres, totidem ordine complectuntur libri: in his, illud potiſſimum ſpectaui, vt nullas adferrem propoſitiones, quæ circulo ad quadrum reducendo neceſſariæ non eſſent: illarum præcipuam & fundamentalem, quæ ordine tertia eſt, nouâ demonſtratione ſtabiliui: tum vbi ſolida ex ductu partium parabolicarum in ſeipſas, vel in alias, tam ſubalterno quam ordinato orta, ad nota paralelopipeda, & partes cylindricas determinatam habentes baſim & altitudinem reduxi, ſcholia & lemmata adiungo, ſequentibus neceſſaria: ad hæc, quia datâ æqualitate proportionum duarum, quam au-

ctor duplici aliâ viâ propoſ. 61 & 62, demonſtrarat, difficile multis viſum eſt, quadraturam vlterius deducere, & ex illâ dato circulo, quadratum exhibere æquale, quâ potui breuitate, & in re perdifficili claritate id præſtare conatus ſum. denique argumenta omnia (quæ quidem momenti alicuius ſunt & ad manus noſtras deuenerunt) contra quadraturam ſecundam, à variis allata, diſſoluo; quod rectene à me factum ſit, an ſecus, Tuo lector iudicio committo, geometricum id modo ſit.

FACVL.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS.

EGo infraſcriptus Societatis IESV per Flandro-Belgicam Præpoſitus Prouincialis, poteſtate ad hoc mihi factâ ab admodum R. P. Goſwino Nickel Præpoſito Generali eiuſdem Societatis, concedo facultatem typis mandandi librum cui titulus: *Expoſitio ac deductio Geometrica Quadraturarum Circuli R. P. Gregorij à S. Vincentio; cui præmittitur liber de natura & affectionibus rationum ac proportionum Geometricarum*, Auctore P. Franciſco Xauerio Aynſcom eiuſdem Societatis, à viris eruditis approbatum. In quorum fidem has manu meâ ſubſcriptas & officij mei ſigillo munitas dedi. Antuerpiæ 23. Maij 1656.

THOMAS DEKENS.

APPROBATIO CENSORIS.

LIbrum hunc compoſitum à R. P. FRANCISCO AYNSCOM Societatis IESV, tanquam nihil continentem Religioni noſtræ orthodoxæ contrarium, aut moribus, ſed vt vtilem ſcientiæ ipſius, quam tractat, amatoribus approbò, & prælo digniſſimum cenſeo. Datum Antuerpiæ 3. Iunij An. 1656.

Chriſtianus Vvochts Archipresbiter
Antuerp. lib. Cenſor.

SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS *Dei gratiâ Hiſpaniarum & Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Auſtriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Sereniſſimus Belgarum Princeps, diplomate ſuo Regio ſanxit, ne quis citra* Iacobi Meurſij *Typographi Antuerpienſis, voluntatem*, opus Geometricum R. P. Franciſci Aynſcom Soc. IESV *intra* 12. *annos proximos imprimat, aut alibi locorum impreſſum in hanc prouinciam importet, venaleúe exponat. Qui ſecus faxit, confiſcatione dictorum librorum, & aliis grauibus pœnis multabitur: ſicuti latiùs patet in litteris datis Bruxellæ, anno Domini* 1656. 23. *Aprilis.*

Signat

Loyens.

LIBRI PRIMI

PRÆFATIO.

CVm ea quæ de rationibus eſt doctrina, non multis nota, atque à paucioribus exculta fuerit, innumeris implexa difficultatibus, ac natiuis quaſi inuoluta tenebris hucuſque latuit: & ea quidem quam à primis Geometris accepimus, tota æquales inter ſimileſve rationes ſtetit, vlterius nihil auſa aut potens. Staretque etiamnum illis incluſa limitibus Geometria, niſi illos PLVS VLTRA *vectus Auctor meus, diſsimilibus perinde ac ſimilibus docuiſſet vti. Quam illi debitam laudem, nec ipſa ſi velit auferre poſsit inuidia. Porro rationum materia, ſi qua alia in tota Geometria, tenera eſt, & erroribus obnoxia: vnde mihi ne contingat idem, quod non paucis accidiſſe video, qui tritâ relictâ viâ, dũ nouas inueſtigant & ſequuntur ſemitas, in præcipitia tandem, & eo quo nolint ipſi, euadunt; ita totum hoc quod de rationibus eſt argumentum, tractare inſtitui, vt ne latum quidem vnguem, à probatis antiquorum diſcedam principiis: magnum in hoc ſecutus Geometram P. Gregorium à S. Vincentio, Præceptorem meum, qui in vaſto, illo & egregio, quod de quadraturis inſcripſit, opere, nullum vſpiam principium inducit nouum, ab Euclide nuſpiam & Archimede recedit. In præcipiti ſtat omnis nouitas, & ad lapſum vergit, niſi quo fulciatur, habeat.*

DE

DE NATVRA RATIONVM

CAPVT PRIMVM.

PARS PRIMA.

Quid Ratio, & an ſit vera quantitas.

EVclides lib.5. Element. Rationem his definit verbis: *Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis, mutua quadam ſecundum quantitatem habitudo.*

Dicitur 1. *Eiuſdem generis*: id eſt, quæ ſub eodem ſunt quantitatis genere, quia quæ ſub diuerſo ſunt, nullo modo inter ſe comparari poſſunt; eo quod in illis nulla ſit radix fundandi mutuam habitudinem. Sic linea conferri nequit cum ſuperficie, neque hæc cum corpore, cubitus cum mina, chœnix cum cotyla, album cum dulci.

Dicitur 2. *Secundum quantitatem*, id eſt ſecundum quod vna maior eſt alterâ, aut minor, aut illi æqualis: propoſitis enim duabus eiuſdem generis quantitatibus, neceſſe eſt vnam maiorem minoremúe eſſe alterâ, aut huic æqualem; porro illa habitudo, quâ ſeſe vel æqualiter, quando ſunt æquales, reſpiciunt, vel inæqualiter, quando illarum altera, maior aut minor eſt reliquâ, appellatur Ratio.

Hinc à Rationibus exclude omnes alias habitudines ſeu relationes quæ non fundantur in quantitate: quales ſunt eæ, quæ fundantur in actione & paſſione, vt Patris ad filium, Heri ad ſeruum; & quæ fundantur in qualitate, vt albi ad album, dulcis ad dulce &c.

Rationem, veram eſſe quantitatem, negat Petrus Nonnius cap.7. *eo quod*, inquit, *neque ſit diſcreta vt numerus, neque continua, cum non ſit extenſa vt linea, ſuperficies* &c. Sed auctor ille non aduertit, rationibus proprietates quantitatis, & id omne conuenire, propter quod lineæ, ſuperficies, corpora, Geometriæ ſunt obiectum, adeoque rationibus veram quantitatis ineſſe eſſentiam: nam vt recte Ariſtoteles *cap.6. Catagor. quanti maximè proprium eſt, æquale, & inæquale dici.* Atqui ratio vna, à Geometris tam antiquis quam recentioribus, demonſtratur maior aut minor alterâ; aut huic æqualis, eadem igitur rationibus quæ primariis tribus quantitatibus, proprietas conuenit. Fuſius idem probat auctor oper. Geom. lib.8. de fin.2. his verbis. *Porro contemplationem eam omnem, quæ circa rationum proportiones, denominatoreſque verſatur: ad veram pertinere Geometriam, de qua demonſtrationes illa ſuas, non ſecus ac de ſimplicibus quantitatibus formare poſſit, extra controuerſiam eſſe debet: quæ res vt clarius intelligatur, ſciendum eſt, non ſolum lineas, ſuperficies, & corpora ad Geometriam ſpectare, ſed id omne cui conuenit eadem ratio, propter quam lineæ, ſuperficies & corpora à Geometra tractari poſſunt. Lineæ enim, ſuperficies & corpora, non minus ad phyſicam cōtemplationem, imo metaphyſicam pertinent, ſecundum conſiderationes illis proprias, quam ad Geometriam; quæ in lineis, ſuperficiebus & ſolidis nil aliud contemplatur, quam de-*

 ductionem

ductionem quantitatis;ſecundum quam lineæ, ſuperficies & ſolida inter ſe comparantur,quatenus vna maior,vel minor alterâ,aut alteri æqualis eſt, aut vna per alteram multiplicari, vel vna alteri addi,aut ab alia demi poteſt; quæ omnia circa æqualitatem aut inæqualitatem verſantur:vnde omnes res phyſicæ,prout huic conſiderationi ſunt ſubiectæ,ad Geometriam non minus ſpectant, quam tres primariæ ſpecies quantitatis:nam temporis duratio, motus affectiones, ponderum momenta & ſexcenta alia,ſecundum eaſdem conſiderationes, Geometricis Theorematis ſubiecta ſunt;quare cum rationes quantitatum inter ſe partim ſint æquales, partim inæquales,ac proinde vna alteri æqualis, alia vero maior aut minor alterâ, cumq; minor ratio à maiori tolli queat,& ratio per rationem multiplicari,& ratio rationi addi &c. neceſſario concluditur rationum notitiam ad Geometriam plane ſpectare,atque ſola quantitas ad Geometriam ſpectat,& eiuſdem eſt obiectum.rationes igitur æque ac tres primariæ, linea, ſuperficies, corpus, veræ ſunt quantitates.

Ad argumentum Petri Nonnij,dico,rationes eſſe de genere quantitatum relatiuarum,*quæ ſimul ſunt cognitione,& quarum tota eſſentia eſt ad aliud vt ait Ariſt*. & rationales quidem,quarum denominatores numeris exprimi ſolent,pertinere ſuo modo ad quantitatem diſcretam, irrationales vero,quarum denominatores, quantitate continua ſolent exprimi, ſpectare ad quantitatem continuam.

Rationem duarum magnitudinum ab earundem interuallo ſeu differentia,recte diſtinguunt Eratoſtenes,Theon, aliique: à binario enim ad vnitatem,& ab vnitate ad binarium,vnum & idem eſt interuallum, ratio autem diuerſa; binarij enim ad vnitatem ratio eſt dupla, vnitatis vero ad binarium,ſubdupla. Ratio aſſertionis eſt,quod differentia, ſit comparatio quantum terminus differat à termino,ratio vero, quoties terminus in termino contineatur.

Ratio vniuerſim diuiditur 1. in rationalem & irrationalem. Rationalis illa dicitur,quæ exiſtit intra magnitudines commenſurabiles, adeoque numeris exprimi poteſt: irrationalis,cuius termini ſunt incommenſurabiles,& numeris exprimi non poteſt.

Diuiditur 2. in rationem æqualitatis & inæqualitatis. æqualitatis ratio eſt quando magnitudines quæ inter ſe comparantur æquales ſunt:inæqualitatis,quando illæ inæquales ſunt.

Inter irrationales nulla datur ratio æqualitatis,prout ex vtriuſque definitionibus certum eſt. Vnde mala & vitioſa eſt rationis ſubdiuiſio, Recentioris cuiuſdam in Euclide ſuo parte 3.lib.5. element.dicentis,*vtramque*(nimirum rationem rationalem & irrationalem) *diuidi in rationem æqualitatis & inæqualitatis*. Falſum eſt enim rationem irrationalem diuidi in rationem æqualitatis & inæqualitatis, vt vel ipſis tyronibus notum eſt.

Ratio inæqualitatis ſiue rationalis,ſiue irrationalis fuerit,vlterius ſubdiuiditur in rationem maioris inæqualitatis & minoris inæqualitatis. maioris inæqualitatis eſt,cuius antecedens eſt maius conſequente;minoris vero illa, cuius antecedens,conſequente minus eſt.

Cæteras diuiſionum ſubdiuiſiones, & ſubdiuiſionum diuiſiones,videre eſt paſſim apud Auctores, Theonem, Boetium, Volumnium, Iordanum,Nonnium,Tartagliam,Tonſtallum,Heniſchium,Clauium &c.

PARS

PARS SECVNDA

Reiiciuntur errores Marci Meybomij.

CLara hæc ſunt omnia & ab antiquis primiſque Geometriæ auctoribus tradita,& tot ſæculorum ſummorumq; virorū auctoritate ac diligenti examine confirmata. Repertus tamen hoc anno eſt Marcus Meibomius(quem Euthymij nomine, ita enim in dialogiſmo ſuo vocari voluit,deinceps compellabo)iſque, quod mirere, non Geometra aut philoſophus,ſed inferioris ſubſellij Grammaticus,qui non præclaros modo huius ſæculi Geometras,ſed ipſam antiquitatem totā , illique coæuos viros doctiſſimos,inſcitiæ,tanquam quid eſſet ratio penitus ignorarint, accuſare auſus eſt. idque adeo nulla de cauſa,vt vel ipſa illius verba proferre pudeat;proferam tamen,vt omnes intelligant , quantum in aliis maioris momenti rebus fidendum illi , qui in re obuia ipſiſque adeo Geometriæ tyronibus nota ac manifeſta,tam pueriliter hallucinatus eſt.

Pag. 83. ita ſcribit : *ex his veterum auctorum locis euidens eſt quid ſit ποσὸν quotum,& ποσότης quotitas : item πηλίκον quantum & πηλικότης quantitas : iam videamus quomodo in rationis definitione,hoc vocabuli locum habeat:duobus autem modis vſurpari potuit:*

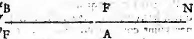
Vel enim vt relationem illam duarum magnitudinum ſpectandam innueret in quoto continuo ſeu quantitate & magnitudine,non autem in quoto diſcreto ſeu quotitate & multitudine: &c.

Vel vt ſignificaret,infinitas magnitudines ab hac comparatione eſſe excluſas.

Tum reiecta poſteriori hac explicatione , priorem confirmat his verbis:*quare vocabulum πηλικότης illo fine non adhibuit, ſed alio : ne ſcilicet ſiniſtre in numero illa relatio ſpectaretur:vt factum ab Eutocio,Theone & aliis: &c: deinde in eo grauiter peccat doctus alioqui ſcholiaſtes,quod has voces κατὰ πηλικότητα ſecundum quantitatem,cum magnitudinum notione coniungendas putat,cum Euclides ipſe relationis notioni illas adiunxerit:* &c.

Itaque ſola prior explicatio vera eſt:hoc enim voluit Euclides; ſecundum quātitatem capiendam eſſe hanc relationem,non autem ſecundum quotitatem: ſeu in quoto continuo vel in quantitate ſeu magnitudine continua ſpectari relationem illam,non autem in quoto diſcreto ſeu numero.

Sint exempli gratia , duæ lineæ BF, FA,quarum maior BF referatur ad minorem FA: itaque quæro quoto ſeu quota parte minoris AF ; maior



FB illam ſuperet:reſpondere poſſum τοσῷδε πηλίκῳ tanto quanto:vel quod commenſurabiles ſint magnitudines τοσῷδε ποσῷ tanto quoto. ſi vero ratio BF ad FA ſit ineffabilis, non poſſum dicere τοσῷδε ποσῷ ; recte autem dicam τοσῷδε πηλίκῳ, tanta quantitate v.g. FN; ſeu vt cum Euclide loquar κατὰ πηλικότητα FN: quare τὸ quantum ſemper exhibere poſſumus,quotum autem non niſi cum rationis magnitudines ſunt commenſurabiles.

Vult igitur hæc Grammatici ſententia,definitionem rationis ab Euclide datam,iis tantum conuenire quantitatibus,de quibus dici poteſt : *vna alteram ſuperat, πηλικότητι, certa magnitudine v.g. FN, vel τοσῷδε πηλίκῳ, tanta quantitate v.g. FN, vel κατὰ πηλικότητα , ſecundum quantitatem FN*; (quæ vltima verba male Grammaticus vertit , *in quantitate, pag.* 80.)aliis vero

 magnitu-

magnitudinibus de quibus dici poteſt: *vna alteram ſuperat τοσῷδε πόσῳ tanto quoto, vel ποσότητι, quotitate, &c. non conuenire*: ſiue breuius, vult definitionem illam tantum conuenire quantitatibus continuis, non autem diſcretis ſeu numeris.

Sed ille ſi vel Ariſtotelem vel philoſophorum vllum legiſſet & intellexiſſet, ſciret vtique quid ſit, res duas ſecundum quantitatem comparare, nec tam puerilem de græcula voce litem moueret: de re, Geometræ, non de voce diſceptant: Ariſtoteles Catagoriæ. ca. 6. de quanto: τοῦ δὲ ποσοῦ τὸ μέν ἐστι διωρισμένον τὸ δὲ συνεχές. *quanti autem aliud eſt diſcretum, aliud vero continuum.* tum vbi proprietates aliquas *quanti* numerauit: num. 26. præcipuam *quanti* affectionem his verbis explicat. ἴδιον δὲ μάλιστα τοῦ ποσοῦ, τὸ ἴσον τε καὶ ἄνισον λέγεσθαι. *Sed maxime proprium eſt quanti, æquale & inæquale dici: dictorum (pergit ibid.) enim quantorum vnumquodque dicitur æquale & inæquale: vt corpus dicitur æquale & inæquale, numerus quoque & tempus dicitur æquale & inæquale: cætera vero quæ non ſunt quanta, non vtique videntur æqualia & inæqualia dici: ſic album, æquale & inæquale non dicitur, ſed potius ſimile vel diſſimile*:

Hinc manifeſtum eſt 1. duo quanta inter ſe conferre ſecundum quãtitatem, nil aliud eſſe, quam illa inter ſe comparare ſecundum æqualitatem vel inæqualitatem:

Manifeſtum eſt 2. numeros æque ac magnitudines continuas, ſecundum quantitatem, id eſt ſecundum æqualitatem & inæqualitatem, inter ſe conferri poſſe:

Manifeſtum eſt 3. vocabulum τὸ ποσὸν (quod grammaticus ipſe fatetur) æque ſumi pro *quanto*, ac pro *quoto*, item ποσότης pro quotitate ac quantitate: vnde nil ad rem facit quod pag. 88. contra Clauium ſcribit his verbis: Hunc (id eſt Commandinum) ſecutus Clauius, *ſecundum quantitatem*, explicat, *ſecundum quod vna maior eſt quam altera, vel minor, vel æqualis*: quod æque verum eſſet ſi pro κατὰ πηλικότητα Euclides dixiſſet, κατὰ ποσότητα: quin imo ſi plane hæc verba omiſiſſet: nil inquam hæc vrgent: quia ποσότης æque quantitatem ſignificat, ac πηλικότης, adeoque perinde omnino fuiſſet, vtrâ voce Euclides fuiſſet vſus: quod autem addit verba illa plane potuiſſe omitti, falſum eſt: definitio enim, omiſſis illis verbis æque relationes ſecundum qualitatem ac ſecundum quantitatem complecteretur, cum tamen tam illas quam omnes alias relationes quæ non fiunt ſecundum quantitatem, à ratione, excluſas voluerit Euclides.

Pag. 110. rationes quarum antecedentes termini maiores ſunt conſequentibus, vocat *exceſſiuas*, illas vero quarum antecedentes termini minores ſunt conſequentibus, *defectiuas*: aitque illas *inepte* à recentioribus vocari rationes maioris & minoris inæqualitatis.

Scio equidem vocabula illa maioris & minoris inæqualitatis à latinis auctoribus inuenta eſſe, quorum loco græci vtebantur μείζονες, ἐλάττονες, *maiores, minores*: ſed aptiſſime illud & prudentiſſime ab illis factum aſſero: cum enim inter rationes μείζονες, aliæ ſint maiores, aliæ minores, idemque accidat inter rationes ἐλάττονες, ad vitandam confuſionem, rationes μείζονες, maluerunt vocare rationes *maioris inæqualitatis*, quam ſimpliciter *maiores*: & rationes ἐλάττονες, *minoris inæqualitatis* quam *minores*.

Deinde, vnde Tibi Grammatice auctoritas, rationes quas Græci maiores & minores dixerunt, latini vero vnanimi conſenſu, maioris & minoris inæqualitatis, mutatis nominibus, contra omnem antiquitatem, & vſum latinorum, vocandi rationes exceſſiuas & defectiuas? ſcilicet hoc

ius

jus aſſumunt Grammatici, interpunctiones, voces, rerum omnium nomina pro libitu immutare, augere, minuere, alios vero ſi illorum vel vnū, ex ratione fecerint, ineptię arguere.

Videte modo ageometricam rationis diuiſionem: pag. 13. *Rationem porro ſumma & generali diuiſione in æqualem & inæqualem veteres diſtribuere. æqualis ratio ſpectatur, cum eorum quæ inter ſe comparantur, alterum nec ſuperat id ad quod comparatur, nec ab eo deficit: vt 2. ad 2. &c. at inæqualis ratio per ſubdiuiſionem ſecatur in maiorem & minorem : maior ratio ſecunda ſubdiuiſione in quinque ſpecies ſubdiuiditur: alia enim eſt multiplex* &c.

Inepta inquam & ageometrica hæc eſt diuiſio: vbi enim ratio rationalis & irrationalis? an maior ratio irrationalis ſecunda diuiſione in quinque ſpecies diuiditur? an vlla irrationalis, multiplex, ſuper particularis &c?

CAPVT SECVNDVM.

Inter quas magnitudines detur ratio.

QVæſtionem hanc definit Euclides lib. 5. de fin. 5. his verbis : *Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicata ſeſe mutuo ſuperare.*

Hoc eſt, illę magnitudines dicuntur inter ſe habere rationem, quarum vtrauis aliquoties ſumpta, ita augetur, vt alteram ſuperet : quod ſolùm iis conuenit quantitatibus, quæ ſub eodem genere ſunt quantitatis.

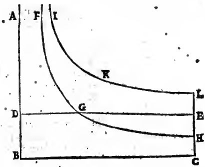
Quamuis clara hæc ſit definitio, nec vllam apud Geometras difficultatem habeat, quæſtiunculæ tamen ex ea oriuntur nonnullæ, quas paucis expedire, viſum operæ pretium eſt.

Quæſtio 1. An rectum inter & curuum detur vlla ratio: ſed quantum ad curua non circularia, ſolutio facilis eſt. demonſtrat enim Archimedes, parabolam ſeſquitertiam eſſe trianguli maximi inſcripti. Auctor item operis Geom. præter parabolam tam conuexam quam concauam, quadrauit ſuperficiem portionis cylindricæ, quam vngulam vocat, eiuſdemque portionis cubauit ſolidum. Porro rectitudo & curuitas non faciunt quantitates differre ſpecie, ſed figura tantum: curua autem circularia cum figuris rectilineis conferri poſſe, præter auctorem operis Geom. hactenus demonſtrauit nemo.

Quæſtio 2. An inter duas magnitudines quarum vna finita eſt ſecundum omnes dimenſiones, altera vero infinita, dari poſſit vlla ratio. Hanc ipſa Euclidis ſoluit definitio: quantumcunque enim finita augeatur quantitas, nunquam æquabit, multo minus ſuperabit infinitam, quod tamen iuxta definitionem, poſſe fieri requiritur. nulla igitur illas inter magnitudines dari poteſt ratio.

Quia vero concipi poſſunt ſuperficies & ſolida quæ ſecundum vnam dimenſionem infinita ſunt, ſecundum reliquas vero finita, quæritur vtrum eiuſmodi ſuperficies & ſolida, cum aliis, quæ ſecundum omnes dimenſiones finita ſunt, comparari poſſint. Reſpondeo non ſolum comparari, ſed qualis inter illas ſit ratio, determinari poſſe. & de ſuperficiebus quidem id egregie demonſtrat auctor oper. Geom. li. 6. propoſ. 139. cuius huiuſmodi eſt conſtructio. *Sint AB, CB, item AD, ED aſymptoti, hyperbolarum FGH, IKL æqualium & ſimilium, ſic conſtituta, vt DE, CB ſint paralelæ, & AD ſit pars lineæ AB. ducaturque EC quæuis paralela DB, occurrens hyperbolis in*

 L & H.



L & H. dico paralelogrammo ECDB, æquari ſuperficiem infinite extenſam, hyperbolis IKL, FGH interceptam. Idem de ſolido acuto Hyperbolico demonſtrat Euangeliſta Torricellio, Geometra egregius.

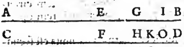
Quæſtio 3. Eſt de angulis contingentiæ, an nimirum illos inter detur vlla ratio. Cenſet P. Gregorius in oper. Geom. in explicatione principij primi lib. 8. nullum angulum ſiue rectilineus aut curuilineus, ſiue mixtus fuerit, præciſe vt angulus eſt, ſeu duarum linearum inclinatio, eſſe quantitatem, ſed aliquid ad quantitatem ſpectans, quale eſt, figura: de quo principio recens quidam auctor in Euclide ſuo in ſcholio ad propoſ. 16. lib. 3. tanquam à ſe tandem inuento, nulla P. Gregorij ex quo deſumpſit facta mẽtione, mirifice ſibi gratulatur: ego de principij illius veritate hic non diſputo, illud ſolum aſſero; ſi anguli mixtilinei ſemicirculorum & anguli contingentiæ, veræ ſint quantitates, adeoque inter ſe aut cum angulis rectilineis comparabiles: tam illos quam hos inter ſe eſſe æquales. Quod ſequentibus propoſitionibus Geometricè demonſtro.

PROPOSITIO I.

Sint duæ quantitates AB, CD, à quibus auferri poſſint partes æquales AE, CF, non minores dimidiis totarum AB, CD, & rurſum à reſiduis EB, FD auferri poſſint partes æquales EG, FH non minores dimidiis ipſarum EB, FD, atque hoc ſemper poſſit fieri.

Dico quantitates AB, CD æquales eſſe, ſiue quod idem eſt

Dico AB eſſe ad CD, vt AE eſt ad CF.



Si enim non ſit AB ad CD vt AE ad CF, ſit ratio AB ad CD minor ratione AE ad CF, fiatque vt AE ad CF ita AB ad CK: erit CK minor quam CD vt patet ex elementis. Quoniam ex AB, CD auferuntur partes æquales & non minores dimidiis ipſarum AB, CD, idemque fiat in reſiduis &c. poteſt ea ablatio partium tamdiu continuari, vt in CD relinquatur pars OD data quantitate, adeoque ipsâ KD, minor. intelligatur id factum eſſe per ablationem v. g. trium terminorum CF, FH, HO; quibus iuxta mentem propoſitionis totidem æquales ablati ſint ex AB, nimirum AE, EG, GI. erit igitur vt AE ad EG ita CF ad FH; & vt EG ad GI, ita FH ad HO, adeoque permutando vt AE ad CF, ita EG ad FH, & vt EG ad FH, ita GI ad HO, igitur per 12. 5. Euclidis, omnes AE, EG, GI hoc eſt AI, ſunt ad omnes CF, FH, HO id eſt CO, vt prima AE eſt ad primam CF: ſed vt AE ad CF ita per conſtructionem eſt AB ad CK, igitur AB ad CK eſt vt AI ad CO, quod impoſſibile; non igitur ratio AB ad CD minor eſt ratione AE ad CF. ſimiliter autem oſtendetur quod non ſit maior, æqualis igitur vt ſit neceſſe eſt: ergo AB

eſt

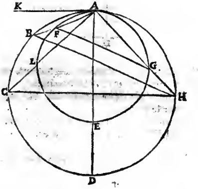
eſt ad CD vt AE ad CF: quæ cum ex hypotheſi æquales ſint, ipſæ quoque AB, CD æquales erunt, quod erat demonſtrandum.

Propoſitio hac, corollarium eſt propoſitionis 116. lib. 2. operis Geometrici. iuxta cuius ſenſum, intelligi debet principium ab auctore aſſumptum in demonſtratione æqualitatis angulorum contingentiæ.

PROPOSITIO II.

DVo circuli ABCD, AFE, ad eandem diametrum conſcripti, contingant ſeſe intus in A, diuiſaque bifariam in C, ſemiperipheria ACD, biſecetur reſiduus arcus ABC in B, tum ex A ducantur ſecantes, ALC, AFB.

Dico angulum rectilineum CLAD maiorem eſſe dimidio mixtilinei anguli CBAD: & rectilineum LAE maiorem dimidio mixtilinei LFAE. item angulum rectilineum BFAC maiorem dimidio mixtilinei BALC, & rectilineum FAL maiorem dimidio mixtilinei FAL; *ex hypotheſi quod illi comparari poſſint.*



Ducatur AK contingens circulos in A, erit angulus KAD vel KAE rectus, & quia ſemiperipheria ACD bifariam eſt diuiſa in C, erit angulus rectilineus CAD ſemirectus, & ſemiperipheria ALE bifariam diuiſa in L. igitur cum rectus angulus KAD vel KAE maior ſit mixtilineo CBAD vel LFAE, (eſt enim æqualis CBAD & KABC) erit rectilineus CAD, vel LAE maior dimidio mixtilinei CBAD vel LFAE. rurſum cum arcus CBA biſſectus ſit in B, erit etiam arcus LFA biſſectus in F.

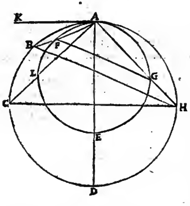
Ducatur iam quæuis ſecans AGH, iunganturque GF, HB; quoniam AK eſt contingens erit angulus rectilineus KAB vel KAF æqualis angulo AHB vel AGF per 32. tertij Euclid. quia vero arcus CB æquatur arcui BA, angulus rectilineus BAC æquatur angulo AHB, eademque de cauſa angulus rectilineus FAL æquatur angulo AGF: ſed angulo AHB vel AGF æquatur angulus KAB vel KAF, igitur rectilineus angulus KAB æquatur angulo rectilineo BAC, vel FAL, & angulus BAC rectilineus, dimidium eſt anguli KAC. at angulus rectilineus KAC maior eſt mixtilineo BAC, vel FAL igitur angulus rectilineus BAC vel FAL maior eſt dimidio mixtilinei BAC, vel FAL. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

PAri modo ſi reſidui arcus BA, FA per ſecantem bifariam diuidantur, rectilinei anguli à ſecante illâ & rectâ BFA contenti, maiores erunt dimi-

dimidiis mixtilineorum à ſecante illa & reſiduis arcubus contentorum: idque ſemper & in omni reſidua biſſectione arcuum, eadem enim omniũ quæ duorum primorum de quibus propoſitio 2. agit, ratio eſt & demonſtratio.

PROPOSITIO III.



Eadem figurâ manente, Dico angulos mixtilineos ſemicirculorum CBAD, LFAE eſſe inter ſe æquales.

Biſecetur ſemiperipheria ACD bifariam in C, & reſiduus quadrans in B, ducanturque ex A ad C & B ſecantes, diuident illæ ſemipheripheriam ALE bifariam in L, & reliquum quadrantem bifariam in F. igitur per 2. huius anguli rectilinei CAD, LAE æquales, maiores ſunt dimidiis mixtilineorum CBAD LFAE: item anguli rectilinei BAC, FAL æquales inter ſe, maiores ſunt dimidiis mixtilineorum reſiduorũ BAC, FAL: quod cum in omni ſemper ſubdiuiſione arcuum reſiduorum fiat, vt ablati anguli rectilinei ſemper inter ſe ſint æquales & maiores dimidiis mixtilineorum à quibus auferuntur, manifeſtum eſt per 1. huius, ſemicirculorum angulos CBAD, LFAE inter ſe eſſe æquales.

PROPOSITIO IV.

Eadem figurâ manente,
Dico angulos contingentiæ KABC, KAFL inter ſe eſſe æquales.

Demonſtratio ex præcedentibus euidens eſt. cum enim æquales inter ſe ſint recti anguli KAD, KAE, item per 3. huius æquales ſint ſemicirculorum anguli CBAD, LFAE, patet ex axiomate 3. lib. 1. Euclidis reſiduos angulos contingentiæ KABC, KAFL eſſe inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

Ex quibus patet alterutrum admittendum eſſe, aut angulos omnes contingentia inter ſe æquales eſſe, aut illos non eſſe veras quantitates.

Quatuor has propoſitiones vnica Theorematis demonſtratione cõplexus eſt P. Gregorius in explicatione principij primi lib. 8. & primam quidem his verbis. *Illæ ſunt æquales quantitates à quibus in infinitum partes demi poſſunt æquales* (adde quod errore excidit) *& non minores dimidiis illarum à quibus auferuntur.* omiſſa 2. quæ clarior videbatur quàm vt demonſtrari deberet, tertiam & quartam his complexus eſt verbis *: igitur quantitas anguli ſemicirculi CBAD, æqualis eſt quantitati anguli ſemicirculi LFAE. quare reliqui etiam anguli contingentiæ, qui complent rectum angulum, ſunt inter ſe æquales.*

Quæ contra auctoris illud Theorema à multis allata ſunt, partim ex principio illo

illo de ablatione partium æqualium in infinitum , non recte intellecto orta ſunt (cui anſam forte dedere vltima verba errore omiſſa, quæ modo addidi) partim adeo friuola ſunt vt iis refellendis vel ſcriptionis laborem pigeat impendere : quale illud eſt quod Alexius Syluius in examine Quadraturarum auctoris, contra idem Theorema attulit , quod recte arguit & refellit Generoſus Dominus Godefridus Aloyſius Kinner à Louuerthurn, Geometra egregius, in eleganti ſuo libello, quem Elucidationem Geometricam Problematis Auſtriaci inſcribit.

Accuratius examinauit idem R.P. Vincentius Leotaud Societatis noſtræ, & ipſe Geometra non vulgaris: pace tamen illius dixerim, rem acu non attigit. Sic enim principium auctoris impugnat. *Si partes*, inquit, *ex vtraque quantitate demendæ eam conditionem (nimirum vt partes demendæ ex vtraque quantitate minores ſemper ſint in infinitum quam vtraque ſit quantitatum inæqualium) admittere poſſunt, quid tam inæquale , quod æquale probari non poſſit per principium allatum eo modo expoſitum? ſi enim duæ ſint quantitates, vna palmaris, altera bipalmaris , quas velim probare eſſe inter ſe æquales, id perficiam; ſi mihi liceat partes demendas ita determinare , vt minores in infinitum ſemper ſint quantitate palmari, ſi eas partes æquales ex vtraque quantitate in infinitum ſubtraxero: eas enim ex ſuppoſitione demere poſſum ex quantitate palmari, quandoquidem minores quam ea ſit ſupponuntur: multo magis ex bipalmari eas licebit ſubtrahere, ergo iuxta principium allatum æquales forent quantitates palmaris & bipalmaris. quis id admittat?*

Hæc vir eruditus. at quid mirum quod ex principio non recte expoſito, partibuſque demendis male determinatis , non recte de totis inferatur? aſſumit auctor duas quantitates de quibus inquirit , æqualeſne ſint an inæquales; aſſeritque æquales eſſe ſi hanc admittant conditionem: nimirum vt ex ntraque partes auferri poſſint, non quæuis, ſed æquales inter ſe & non minores dimidiis totarum à quibus auferuntur, idque ſemper poſſit fieri. Videat nunc vir egregius, an quantitates (palmaris & bipalmaris) à ſe aſſumptæ. hanc conditionem vllo modo admittant: euidēs eſt, quod ſi à palmari partem auferam non minorem dimidiâ, eique æqualem auferam ex bipalmari, hanc ſemper minorem eſſe dimidiâ bipalmaris: item ſi ex bipalmari partem auferam non minorem dimidiâ, non poſſe huic æqualem auferri à palmari: vnde conſequens eſt, ab vtrauis incipiat partium ablatio, ſiue à palmari ſiue à bipalmari , non poſſe ſeruari conditionem ab auctore requiſitam , nimirum vt partes ſint æquales , inter ſe , & non minores dimidiis quantitatum à quibus auferuntur.

At auctor partes demendas tantum voluit eſſe æquales, conditionem alteram non requiſiuit: nimirum vt non minores ſint dimidiis quantitatum à quibus auferuntur: eſto id explicite non fecerit (qui error eſt typographi vel amanuenſis) implicite certe requiſiuit, cùm anguli rectilinei quos ex angulis mixtilineis ſemicirculorum aufert , non ſint qualeſcunque, ſed determinati per biſſectionem ſemiperipheriarum, & arcuum reſiduorum in infinitum continuatam : qua fit vt anguli rectilinei ablati ſemper ſint maiores dimidiis mixtilineorum à quibus auferuntur; ſuppoſito quod illi comparari inter ſe poſſint.

Hucuſque de angulis contingentiæ: vlterius in illis non procedo , quod ad rem quam ago, lis illa non pertineat : ſufficit oſtendiſſe aut nullam inter illos dari rationem, adeoque non eſſe quantitates, aut quantitates ſi ſint, ſolam æqualitatis rationē illos inter reperiri.

Quæſtio 4. An anguli rectilinei ſint quantitates adeoque inter ſe cōparabiles.

parabiles. conſequenter ad priora, dico angulos rectilineos vt præciſe ſunt duarum rectarum inclinatio, non eſſe quantitates, ſed modum, vel aliquid ſpectans ad quantitatem; comparari tamen inter ſe poſſe, prout terminati vel terminabiles ſunt per communem menſuram, quæ eſt arcus circularis. Vnde dum Euclides cæterique Geometræ, angulum vnū rectilineum, maiorem minoremúe dicunt altero, nil aliud volunt, quam angulum vnum, maiorem aut minorem intercipere arcum circuli quam alter in eodem circulo intercipiat.

At Euclides angulum ſemicirculi, & reliquum contingentiæ comparat cum angulo acuto rectilineo ſecundum quantitatem, aitque ſemicirculi angulum quouis acuto rectilineo maiorem, reliquum vero acuto omni minorem: atqui comparatio ſecundum maius & minus, ſolum poteſt inſtitui inter quantitates, igitur tam anguli ſemicirculi & contingentiæ quam rectilinei quantitates ſunt. Reſpondeo, Euclidem, dum ait, ſemicirculi angulum maiorem eſſe quouis acuto rectilineo, reliquum vero quouis acuto minorem, nil aliud velle, quam quod prima propoſitionis 16. lib. 3. dicit aſſertio. nimirum quod inter contingentem & peripheriam nulla recta cadere poſſit quin circulum ſecet: nullum enim fundamentum eſt in Geometria comparandi angulos mixtilineos cum rectilineis, cum nulla ſit menſura vtriſque communis, ſecundum quam ſolam anguli qui inter ſe comparantur, conferri poſſunt.

Propoſitionum quatuor præcedentium vim infringere conatus eſt non nemo amicus Geometra, huiuſmodi ſcripto:

Propoſ. 116. de progreſſion. (cuius corollarium eſt propoſ. 1. paulo ante à me allata) non eſt vera vniuerſaliter, quia innititur propoſ. 1. lib. 10. Euclidis, in eo ſenſu in quo Euclides non dixit: in quem etiam errorem incidit Peletarius vt optime obſeruauit Clauius in 19. lib. 3. ea enim propoſitio ſolum valet, quoties quantitates ſunt tales, vt vna ſæpius repetita, alteram æquet: at angulus contingentiæ vt demonſtrat Euclides, cum ſit minor quolibet rectilineo, minoritate diuerſæ rationis, non poteſt æquare rectilineum, quare quando aſſumitur in probatione dictæ propoſitionis, quod ſi auferantur partes non minores dimidio, tandem deuenitur ad aliquid minus, nego hoc poſſe fieri, niſi quantitates ſint tales vt illud minus ſit auferibile per eam diuiſionem à maiori, quod non euenit in caſu præſenti: imo hæc demonſtratio torquetur contra auctorem. demonſtrabitur enim angulus rectilineus prorſus æqualis angulo ſemicirculi; quod eſt expreſſe contra 19. Euclidis, demonſtrantis ſemicirculi eſſe maiorem quolibet rectilineo acuto, reliquum autem quouis acuto minorem: cum autem tam angulus ſemicirculi quam reliquus contineatur in angulo recto tanquam partes (vbi enim non datur pars & pars, non datur reliquum vna ablata, quia totum aufertur) ſic demonſtrabitur ex demonſtratione auctoris angulus ſemicirculi angulo recto æqualis &c. appelletur angulus ſemicirculi angulus Z, & angulus rectus X, & fiat figura & conſtructio vt iacet ab auctore ſcripta: quoniam angulus EAL (vide fig. propoſ. 2. ante allatæ) non eſt minor dimidio tam anguli ſemicirculi Z, quam anguli recti X, & angulus LAF non eſt minor dimidio anguli rectilinei LAK, & mixtilinei LAF, & ſic ſemper poſſit fieri talis diuiſio, &c. ſequitur quod ſi quid valet demonſtratio cum ſuo corollario & illatione factâ ab hoc auctore qui demonſtrationem defendit, probabitur angulum Z, eſſe æqualem angulo X.

Tota ratio à priori paralogiſmi eſt, quia ex vno capite ſi diuidatur per rectam lineam angulus rectus quacunque poſſibili diuiſione, hæc recta nunquam cadet intra tangentem & peripheriam, ſed ſemper cadet intra circulum, ergo non eſt auferibile per rectam lineam id quo angulus rectus ſuperat angulum ſemicirculi. hinc

ſequitur

ſequitur quod ſi in infinitum diuidatur angulus rectus per rectas lineas, per medietates & medietates medietatum, cum hæc recta linea diuidens, in quocunque caſu demonſtretur cadere intra circulum, ſemper diuidet etiam angulum ſemicirculi, conſtituens veram partem non minorem medietate illius anguli qui diuiditur per ſingulas diuiſiones, ergo nunquam poterit deueniri per talem diuiſionem à recta linea factam, vt relinquatur quo angulus rectus ſuperat angulum ſemicirculi, & ſic nihil prorſus valet demonſtratio.

Eadem ratio eſt de angulo ſemicirculi maioris, reſpectu anguli ſemicirculi minoris; quamuis enim primus angulus ſit maior ſecundo, tamen exceſſus non eſt auferibilis per rectam lineam: quod ab Euclide demonſtratur ex propoſ. 19. l. 3. ſi enim eſſet auferibilis, iā eſſet ducibilis recta linea à puncto anguli quæ nō caderet intra circulum minorem, adeoque eſſet eius tangens, & conſequenter cum diametro conſtitueret angulum rectum, & tamen eadem recta caderet intra circulum maiorem, & conſequenter cum eadem diametro non conſtitueret angulum rectum, & ſic ſequerentur duo contradictoria.

Cum ergo non ſit principium per ſe notum, quod ab omni maiori poſſit detrahi minus per quamcunque lineam, & ex alio capite demonſtretur ab angulo recto non eſſe detrahibilem angulum vllum rectilineum qui ſit æqualis angulo ſemicirculi, cuiuſcunque ſit magnitudinis, ſequitur ab angulo recto non poſſe detrahi per rectam lineam id quo ſuperat angulum cuiuſcunque ſemicirculi: in lineis quidem fateor ſi vna eſt maior, poſſe detrahi exceſſum quo aliam ſuperat: at in angulis diuerſæ rationis, hoc eſt proprium, vt non per rectam lineam detrahi poſſit exceſſus vnius reſpectu alterius, quamuis putem principium per ſe notum eſſe, ab omni maiori poſſe detrahi minus aliquo modo, & ſic ab angulo recto poteſt detrahi angulus ſemicirculi per lineam circularem, quamuis non poßit per rectam.

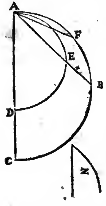
Et ſane diſſimulare non poſſum quin fatear ingenue me maxime admirari, & vix poſſe percipere quod Geometræ doctiſſimi & perſpicaciſſimi non videant ex ipſis fere terminis, angulum ſemicirculi maioris, eſſe maiorem angulo ſemicirculi minoris; cum enim vnum latus vtriuſque anguli ſit, eadem recta linea ducta à puncto contactus & tranſiens per centrum vtriuſque circuli, & lineæ curuæ circulorum ſeſe contingant in vnico puncto quod eſt punctum anguli vtriuſque, ſequitur quodcunque punctum circuli maioris diſtare à quocunque puncto circuli minoris: adeoque eſſe ſpatium inter ea puncta, cum igitur angulus ſemicirculi maioris fiat ex inclinatione lineæ circularis reſpectu diametri, & hæc inclinatio ſecundum quodcunque punctum, vno excepto in ipſo contactu diſtet extra circumferentiam minorem, quo pacto hæc inclinatio non includet pluſquam inclinatio conſtituta à circumferentia minori, cum hæc ſit infra inclinationem circumferentiæ maioris? &c. quæ ratio mihi eſt ita euidens, vt eſt euidens quod duo circuli in vnico ſolum puncto ſe poßint contingere.

Hæc eſt ratiocinatio viri doctiſſimi, quâ putat demonſtrationum ante allatarum vim plane à ſe infringi: verum hæc cuiuſmodi ſit, videamus.

Ac 1. ſuppono; inter duas magnitudines aliquam eſſe rationem, idem eſſe, ac duas magnitudines ſecundum quantitatem, id eſt ſecundum exceſſum vel defectum aut æqualitatem poſſe comparari: rurſum illas magnitudines ſecundum quantitatem poſſe comparari, de quibus dici poteſt, hæc maior aut minor eſt illâ: vnde conſequens eſt, magnitudines illas iuxta defin. 5. lib. 5. eiuſmodi eſſe, vt vna aliquoties ſumpta poſſit alteram æquare vel ſuperare.

Atqui ſecundum auctorem hunc, angulus ſemicirculi maioris, maior eſt angulo ſemicirculi minoris, igitur anguli ſemicirculi, eiuſmodi ſunt quantitates vt vna aliquoties ſumpta, poſſit alteram ſuperare: igitur in

angulis duobus ſemicirculi, verificari poteſt propoſ.1. decimi, cùm illis competat conditio ab auctore in 1. decimi requiſita. igitur vera eſt hæc propoſitio. *eſto angulus ſemicirculi BAC & quiuis minor angulus mixtilineus Z, qui aliquoties multiplicatus poſſit excedere angulum ſemicirculi BAC; auferatur ex angulo ſemicirculi, angulus quidam maior dimidio anguli ſemicirculi & à reſiduo angulo ſemicirculi rurſus auferatur angulus maior dimidio reſidui anguli; & hoc ſemper poſſit fieri, dico tandem relinquendum angulum aliquem mixtilineum v.g. FA, dato Z minorem.*



Igitur & vera eſt propoſitio 116. de progreſſ. illiuſque corollarium. ex quo huiuſmodi formo propoſitionem, quæ dependet à veritate 1. decimi.

Sint duo ſemicirculi ABC, AED ad eandem diametrum poſiti contingentes ſe intus in A. ex quo ſecans ducatur AEB, biſſecans vtriuſque ſemicirculi peripheriam in E & B. dico angulum ſemicirculi BAC eſſe ad angulum ſemicirculi EAD, vt angulus rectilineus CAB ad rectilineum DAE.

Igitur & vera eſt propoſit. 1. ex quatuor ante allatis, quæ eadem eſt cum hac ſed terminis generalibus propoſita.

Ex his ſequitur 1. male argui propoſitionem 116. de progreſſ. eiuſque corollarium, (quod hic eſt propoſitio 1.) tanquam minus vniuerſalem, quia innititur 1. decimi, quæ duas requirit quantitates, quarum altera aliquoties ſumpta poſſit alteram ſuperare: male inquam arguitur, tum quia in tota Geometria nulla vniuerſalior eſt 1. decimi, aut 116. de progreſſ. neque enim vſpiam in tota Geometria, comparantur duę magnitudines quibus ea conditio non competat, vt vna aliquoties ſumpta poſſit aliam excedere, tum quia eadem conditio requiſita inuenitur in angulis ſemicirculorum vt ante oſtendi.

Sequitur 2. ex eo quod angulus contingentiæ ſit minor quouis acuto rectilineo, adeoque per rectam lineam non ſit auferibile id quo angulus rectus ſuperat angulum ſemicirculi, ex eo inquam, male negari aſſumptũ in demonſtratione primæ propoſ. *quod ſi auferantur partes æquales & non minores dimidiis, deueniendum ad aliquid dato minus: quia illud minus non eſt auferibile à maiori per eam diuiſionem*: nam illud *minus* quod relinquitur aut ad quod deuenitur, non eſt angulus contactus, neque *totum* à quo reliqua auferuntur, eſt angulus rectus, ſed *totum*, eſt angulus ſemicirculi, vt patet ex propoſ.3. huius, & *minus* illud quod relinquitur eſt angulus mixtilineus FA, pars nimirum anguli ſemicirculi: in quibus auctor ille plane aberrauit, vnde & reliqui errores omnes nati.

Sequitur 3. male aſſeri, angulum contactus eſſe minorem quouis angulo acuto rectilineo, *minoritate diuerſæ rationis.* quis enim neget, lineas rectas & curuas eſſe eiuſdem ſpeciei, item plana rectilinea & curuilinea, mixtilinea eiuſdem eſſe rationis, cum comparari inter ſe poſſint? atqui anguli omnes cum ſint eſſentialiter duarum linearum inclinatio, quæ lineæ qualeſcunque ſunt, ſpecie non differunt: in eadem quoque manent ſpecie inclinationes, æque atque ipſæ lineæ quarum ſunt inclinationes. quod

quod ſi verum, vt eſt veriſſimum, non poteſt angulus contingentiæ, dici minor acuto rectilineo, *minoritate diuerſæ ſpeciei*: vbi enim duæ quantitates non differunt ſpecie, ibi exceſſus vnius ſuper alia, aut huius ab illa defectus differre nequit ſpecie: adde angulum contactus partem eſſe anguli recti, imo cuiuſcunque acuti rectilinei: pars autem ſpecie non differt à toto homogeneo; vt ſunt anguli rectilinei: aliud eſt in phyſicis compoſitis hæterogeneis.

Sequitur 4. nil contra nos facere, quod auctor oſtendat ex demonſtratione noſtra ſequi, angulum ſemicirculi æquari angulo recto, id enim & nos ſequi dicimus, ex hypotheſi quod anguli illi ſint veræ quantitates & inter ſe comparabiles. quod abſurdum cum ſit, & tamen legitime demonſtretur ſequi; arguenda non erat demonſtratio, ſed id quo poſito, demonſtratiue illud ſequi oſtenditur.

Sequitur 5. male pro cauſa paralogiſmi à me commiſſi aſſignari quod putarim, ſi angulus rectus per rectas lineas diuidatur, quacunque poſſibili diuiſione, eadem diuiſione à recto poſſe auferri id, quo angulus rectus ſuperat angulum ſemicirculi: id enim nunquam mihi in mentem venit, neque illud vſquam aſſumpſi: *tota* enim quæ per diuiſionem exhauriuntur, non ſunt anguli recti, ſed anguli ſemicirculi; & *reſiduum dato minus*, eſt angulus mixtilineus ex arcu circuli & linea ſecante; non autem angulus contactus.

Sequitur 6. non recte dici exceſſum quo angulus ſemicirculi maioris excedit angulum ſemicirculi minoris, non poſſe auferri per rectas lineas: hæc enim aſſertio ſupponit id quod eſt in quæſtione, nimirum ſupponit angulum ſemicirculi maioris, maiorem eſſe angulo ſemicirculi minoris. quæritur enim, an angulus ſemicirculi maioris, ſit maior angulo ſemicirculi minoris: aſſerit auctor ille cum aliis; ego nego cum P. Gregorio: & dico ſi anguli ſemicirculorum ſint veræ quantitates & inter ſe comparabiles, omnes eſſe æquales; quod cum geometrice demonſtretur, ad eneruandam demonſtrationem, non recte adfertur aut ſupponitur vt vera, aſſertio noſtræ contradictoria, de qua eſt quæſtio: neque refert ex eo quod anguli ſemicirculorum inæqualium demonſtrentur eſſe æquales, infinita ſequi abſurda aut contradictoria, hoc enim demonſtrationis vitium non eſt, quæ hypothetica eſt, ſed hypotheſis ex qua illud legitime demonſtratur ſequi, quod innumera poſt ſe trahit abſurda.

CAPVT TERTIVM.

De modo duplici rationes inter ſe comparandi.

DVos potiſſimum modos rationes inter ſe comparandi, tota hactenus agnouit Geometria: vnum, quo ratio vna, maior minorue alia, aut illi dicitur æqualis; & hic, rationum eſt comparatio ſecundum quantitatem. alterum, quo ratio vna, alterius duplicata, triplicata, quadruplicata dicitur: & hic, eſt rationum comparatio ſecundum multiplicationem.

Vtroque porro modo, rationes legitime ac geometrice inter ſe conferri poſſe, palam & in confeſſo eſt apud eos, qui antiquos Geometras vel obiter legere, & rationum naturam mediocriter perſpectam habent. quia

tamen recentiores nonnullos, in eum errorem delapſos video, vt totam rationum naturam, in ſola multiplicatione conſiſtere, illamque a b hac ita dependere velint, vt rationes aliter inter ſe conferri poſſe negent, quam ſecundum multiplicationem; non abs re viſum eſt, priuſquam ad alia progrediar, errorem illum tenebraſque diſcutere, ne alios minus in rationum argumento verſatos, vnà inuoluant.

Dico igitur recte ac legitime rationes ſecundum quantitatem, adeoque aliter quam ſecundum multiplicationem conferri inter ſe poſſe.

1. Oſtenſum eſt cap. 1. huius, rationes æque veras quantitates eſſe atque ſunt tres primariæ, linea, ſuperficies, corpus. ex quo illud conſequens eſt, eas omnes rationibus affectiones deberi, quæ primariis illis quantitatibus [illegible] talibus, conueniunt. atqui ſecundum omnes, aliud eſt duas lineas v. g. inter ſe conferre ſecundum quantitatem, hoc eſt ſecundum quod vna maior, minorúe eſt alterâ aut illi æqualis; aliud vero, eaſdem inter ſe conferre ſecundum potentias, vtraque inſuper recte ac legitime inſtituitur comparatio. igitur & aliud eſt duas rationes inter ſe conferre ſecundum quantitatem, hoc eſt ſecundum quod vna maior minorúe eſt alterâ, aut illi æqualis, aliud eaſdem inter ſe conferre, ſecundum multiplicationem (quæ rationum quædam veluti potentia eſt) vtraque inſuper recte ac legitime inſtituitur comparatio.

2. Certum ac indubitatum eſt, & vltro aduerſarij concedunt, rationes aliquas dari, ita contrarij ac diuerſi ordinis, vt inter ſe conferri nullo modo poſſint ſecundum multiplicationem. quales ſunt ratio maioris & minoris inæqualitatis, prout demonſtrabimus cap. 15. huius: & tamen euidens eſt, non minus illas inter, atque inter duas quaſcunque rectas lineas, certam ac determinatam dari habitudinem ſecundum quantitatem, cum denominatores illarum exhiberi poſſint, vti exhibebimus cap. 6. huius; rationes igitur aliter inter ſe conferri poſſunt ac debent, quam ſecundum multiplicationem.

A B C D

3. Si rationes aliter inter ſe conferri nequeant quam ſecundum multiplicationem, igitur & maioritas vnius rationis ſuper alia; penes eandem deſumenda eſt, illaque ratio maior alterâ dicetur, quæ eiuſdem tertiæ magis eſt multiplicata; quod falſum & contra Euclidem. ſint enim quatuor termini continue proportionales ABCD, & A quidem ſit minimus; ratio A ad D triplicata eſt rationis A ad B, cuius duplicata tantum, eſt ratio A ad C; & tamen iuxta Euclidem & rei veritatem ratio A ad D minor eſt ratione A ad C.

A B

C D

4. Ratio multiplex v. g. dupla, tripla, quadrupla, ſpecie differt à ratione multiplicata v. g. duplicata, triplicata, quadruplicata &c. nam rationem v. g. A ad B duplam, triplam eſſe &c. ſignificat vel quantitatem A, bis, ter &c. per additionem continere quantitatem B, vel rationem A ad B bis, ter &c. per additionem continere aliam rationem C ad D, ſiue rationem CD, ſibi additam, producere rationem AB: rationẽ vero A ad B duplicatã, triplicatã eſſe rationis C ad D, ſignificat rationẽ A ad B, bis, ter &c. per multiplicationem continere rationem C ad D, vel rationem C ad D bis, ter in ſe ductam, producere rationem A ad B. cum igitur ſpecie differant; continentia vnius in alio per additionem, & continentia vnius in alio per multiplicationem, neceſſario etiam modi rationes ſecundum illas continentias comparandi ſpecie inter ſe differunt: & cum ab antiquis Geometris paſſim vtroque

illo modo rationes inter ſe collatæ ſint, manifeſtum eſt, rationum comparationes ſecundum duplicem illum modum legitime inſtitui.

Porro rationem triplam differre à triplicata, duplam à duplicata &c. manifeſtum eſt 1. ſit A linea tripla lineæ B, erit ratio A ad B tripla: quia vero inter A & B infinitæ poni poſſunt mediæ proportionales, poterit ratio A ad B eſſe duplicata, quadruplicata, centuplicata; &c. Intelligatur igitur inter A & B vna media poni proportionalis, erit ratio A ad B duplicata, & ſimul tripla, ſi duæ ponantur mediæ erit ratio A ad B triplicata & ſimul tripla, ſi tres mediæ, erit ratio A ad B quadruplicata & ſimul tripla & ſic de cæteris. neceſſario igitur dupla à duplicata, tripla à triplicata & ab alia quauis multiplicata diſtingui debet. 2. poſitis quatuor continue proportionalibus 27. 9. 3. 1. ratio 27. ad 1. eſt triplicata rationis 3. ad 1. ſi quis autem illam triplam dixerit, quomodo ratio 27 ad 1. diſtinguetur à ratione 3, ad 1. quæ vere tripla eſt? ſcio quidem rationem 3. ad 1. reſpectu alicuius poſſe eſſe triplicatam, & duplam alicuius duplicatam, ſed idcirco, duplam cum duplicata, triplam cum triplicata confundere ſi liceat, eodem iure, triplam licebit vocare quadruplam, quintuplam, centuplã, &c. cum eadem tripla ratio reſpectu alicuius poſſit eſſe quadruplicata, quintuplicata, centumplicata, prout plures fuerint mediæ proportionales inter extremos terminos rationis triplæ, poſitæ.

Denique cum nullum opinionis contrariæ apud antiquos reperire ſit veſtigium, imo ex illa neceſſario ſequantur ea, quæ totam antiquorum euertunt Geometriam, nullum inſuper ab erroris illius ſequacibus pro ea argumentum vel ad ſpeciem probabile, nedum geometrica adferatur demonſtratio, ſequitur illam inter ea habendam eſſe figmenta, quæ ſola aſſertione, & nulla veriſimilitudine aut probabilitate conſtant, adeoque merito à tota Geometria proſcribendam.

CAPVT QVARTVM.

De Proportione, Medietate, Proportionalitate.

PARS PRIMA.

Proportio.

OStenſum eſt capite præcedenti, rationes ſecundum duplicem modum inter ſe poſſe comparari, altero ſecundum quantitatem, hoc eſt ſecundum quod vna maior minorúe eſt aliâ, aut illi æqualis: altero ſecundum multiplicationem. de vtroque agendum deinceps: & de poſteriori quidem cap. 15. huius. de priori vero, præſenti & ſequentibus.

Proportio eſt mutua duarum rationum quarumcunque ſecundum quantitatem habitudo.

Dixi, *rationum quarumcunque*, quia cum rationes omnes qualeſcunque fuerint, æque veræ ſint quantitates ac tres primariæ, datiſque duabus rationibus quibuſcunque, neceſſario vna maior minorúe ſit alterâ, aut illi æqualis, ſicut linea lineæ comparata, manifeſtum eſt inter quaſuis duas rationes certam ac determinatam, mutuamque ſecundum quantitatem dari

dari habitudinem, quam proportionem appellamus.

Diuiditur proportio 1. in rationalem & irrationalem. rationalem voco, quæ conſiſtit inter duas rationes, quarum denominatores ſunt commenſurabiles. irrationalem, quæ eſt inter duas rationes, quarum denominatores ſunt incommenſurabiles.

Diuiditur 2. in proportionem æqualitatis & inæqualitatis. æqualitatis proportio eſt, quando rationes duæ, quæ inter ſe conferuntur, æquales ſunt; quæ proportio ſola, ab antiquis in conſiderationem vocata & Analogia dicta eſt. inæqualitatis proportio eſt, quando rationes quæ cõparantur, ſunt inæquales inter ſe.

Proportio inæqualitatis ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. maioris inæqualitatis eſt, quando maior ratio confertur cum minori; minoris inæqualitatis, quando minor ratio confertur cum maiore.

Medietas.

MEdietas, eſt medius terminus, qui eorundem extremorum diſtantiam, pari vel rationum, vel partium differentiâ diuidit: vel.

Medietas eſt connexio quadam extremorum, per habitudinem vtriuſque ad medium.

Medietatum ſex præcipue numerantur ſpecies à Pappo, Theone &c.

1. *Geometrica* quando vt medius terminus eſt ad vnum extremorum, ita reliquus eſt ad medium: vt in his 3.6.12.

2. *Arithmetica*, quando tribus exiſtentibus terminis, medius, vnum extremorum pari exceſſu ſuperat, & à reliquo ſuperatur. vt in his 3.6.9.

3. *Harmonica*, quando eadem eſt ratio maximi ad minimum, quæ eſt differentiæ inter maximum & medium, ad differentiam inter medium & minimum. vt hic. 2.3.6.

4. *Harmonica ſubcontraria*, quando eſt vt tertius terminus ad primum, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi. vt hic. 6.5.3.

5. *Geometrica ſubcontraria*, quando eſt vt tertius terminus ad ſecundũ, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi. vt hic: 5.4.2.

6. Quando vt ſecundus terminus ad primum, ita primi exceſſus ad exceſſum ſecundi. vt in his. 6.4.1.

Has inter medietates prima ac præcipua eſt Geometrica: hæc enim teſte Pappo, & ſeipſam & alias omnes ex æqualitate producit. differt medietas ab analogia, quod omnis analogia ſit medietas, ſed non contra: accidit enim aliquid medium eſſe, quod extremorum reſpectu non eſt proportionale: veluti in his numeris. 3.2.1.

Proportionalitas.

PRoportionalitas eſt duarum proportionum quarumcunque mutua ſecundum quantitatem habitudo.

Datis enim duabus quarumcunque rationum proportionibus, neceſſario vna maior aut minor eſt alterâ, aut illi æqualis. habitudo autem illa, quâ ſeſe æqualiter, quando ſunt æquales, reſpiciunt, vel inæqualiter, quando ſunt inæquales, vocatur proportionalitas, ſiue propoſitionum ratio.

Diuiditur

Diuiditur in proportionalitatem æqualitatis, & inæqualitatis. æqualitatis eſt quando proportiones duæ quæ conferuntur, ſunt inter ſe æquales. inæqualitatis eſt, quando proportiones illæ ſunt inter ſe inæquales.

Proportionalitas inæqualitatis, ſubdiuiditur in proportionalitatem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. maioris inæqualitatis eſt, quando maior proportio confertur cum minori, minoris inæqualitatis, quando minor proportio confertur cum maiori.

Proportionalitatem gratis confictam eſſe, & contineri ſub nomine rationis ex rationibus compoſita, contendit Alexius Syluius, In examine quadratur. P. Gregorij, quod quam non rectè & parum geometricè idem aſſeruerit, oſtendam cap. vltimo huius libri.

PARS SECVNDA.

Errores Euthymij Grammatici de Proportione.

RVrſus hic, vt in rationis definitione, turpiſſime hallucinatur Grammaticus.

1	2	4	8	16	32	64
1	1	1	1	1	1	1
1	3	9	27	81	243	729
1	1	1	1	1	1	1
1 4	16	64	256	1024	4096.	
1 1	1	1	1	1	1	

Pag. 175. tabulam proponit progreſſionum rationum, vt hic in margine videre eſt: prima eſt rationis duplæ, altera triplæ, tertia quadruplæ: & ſic deinceps: mox hæc addit: *illud autem nouè hic obſeruandum, cuiuſque ex his rationum progreſſionibus rationem cum ſua ſeriei & progreſſionis ratione ſolum comparari poſſe, ita vt ſciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem & viciſſim obtineat, nullo autem modo diuerſæ progreſſionis rationes inter ſe comparari poſſunt, vt, quam inter ſe rationem habeant definiatur. quamuis illarum differentialis ratio ſit notiſſima: quare ratio 2. ad 1. quæ prima ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet non tantum ad rationē 3. ad 1. quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed ad omnes alias ſeriei ſecūdæ, tertiæ & quartæ &c. rationes. hoc autem inde euidens eſt quod duas diuerſarū progreſſionum rationes per quamcunque aliam minorē menſuraturi, nullā plane inuenire queamus quæ vtramq; exactè metiatur: planum itaque eſt omnes diuerſæ ſeriei rationes inter ſe eſſe incommenſurabiles.*

Hinc pag. 188. proportionem ſic definit: *proportio eſt eiuſdem progreſſionis rationum, rationis æqualitas.*

Mox ſui immemor ſubiungit, *diuerſarum tamen progreſſionum rationes inter ſe comparari poſſunt, ſed abſque vllo vſu & contemplationis concinnitate. vti enim in prima rationis ſerie ratio 4. ad 1. dupla eſt rationis 2. ad 1, ſic in tripla rationis ſerie, ratio 9. ad 1. dupla eſt rationis 3. ad 1.* Hæc ille, inſcite plane & ageometricè.

Vnicus craſſiſſimi erroris fons, quod non intelligat Grammaticus, quid ſit rationem vnam cum altera conferre κατὰ πηλικότητα ſecundum quantitatem, quod nil eſt aliud quam illas inter ſe comparare ſecundum æqualitatem & inæqualitatem: cum enim rationes ſint veræ quantitates, vt oſtenſum cap. 1. huius, poſitis duabus rationibus quibuſcunque, neceſſe eſt vnam alterâ maiorem aut minorem eſſe, aut illi æqualem; ſiue

exceſſus ille aut defectus, numeris exprimi poſſit ſiue non: porro relatio illa duarum rationum ſecundum eſſe æquale aut inæquale, eſt proportio; quemadmodum ratio, eſt relatio duarum magnitudinum quarumcunque eiuſdem generis, ſecundum eſſe æquale aut inæquale.

Hinc non ſolum rationes ſeriei primæ, comparari poſſunt cum omnibus & ſingulis rationibus ſeriei ſecundæ & tertiæ, ſed cum omnes ſint rationabiles, effabilem habent proportionem.

Quod addit rationem v.g. 2 ad 1. incommenſurabilem eſſe rationi 3. ad 1. quod communi careant menſurâ, plane falſum eſt & ageometricum: neque intelligit grammaticus quæ aut qualis rationum ſit menſura. Rationum multiplicium, eadem ſemper & in omnibus communis menſura eſt, ratio æqualitatis 1 ad 1, ſicut vnitas numerorum communis eſt menſura: porrò ratio 1 ad 1 ter per additionem ſumpta, metitur rationem triplam 3 ad 1, bis verò ſumpta metitur rationem 2 ad 1.

Falſum item quód ratio 9 ad 1 dupla ſit rationis 3 ad 1. huius enim dupla eſt ratio 6 ad 1, tripla vero ratio 9 ad 1: ſed de his fuſius alio loco.

CAPVT QVARTVM.

De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum numeris expreſſarum.

PARS PRIMA.

De denominatore rationis.

DEnominator (quem alij nomen, denominationem alij, Euclides verò & Eutocius quantitatem appellant rationis) definiri à Geometris his ſolet verbis: *Denominator cuiuſque rationis, eſt magnitudo quæ exprimit habitudinem antecedentis termini ad conſequentem.*

At melius meo iudicio, ſic definietur: *denominator cuiuſque rationis eſt magnitudo quæ exprimit quantitatem rationis.* proprium enim denominatorum munus eſt exhibere, quanta ſit ratio, dupla v. g. an tripla &c. porrò exhibere habitudinem antecedentis ad conſequens idem eſt ac exhibere rationem, nam habitudo antecedentis ad conſequens, eſt ipſa ratio.

Ratio, quantitas rationis, & denominator, in re vnum idemque ſunt. differunt tamen, vt philoſophicè loquar, penes modum concipiendi. Sint v.g. duo numeri 6 & 2. habitudo ſeu relatio 6 ad 2, eſt ratio. quantitas illius, eſt eſſe triplam, quod vtique eſt eſſentialiter relatiuum, & idē in re cum ratione 6 ad 2. quia verò denominator eſt illa magnitudo quæ quantitatem illam exprimit, neceſſario denominator in re debet eſſe quid relatiuum; impoſſibile enim eſt, relatiuum vt tale, exprimi per abſolutum. porro in hoc differunt, ratio, quantitas, denominator, quod cōcipiendo *rationem ſeu habitudinem antecedentis termini ad conſequentem,* attingam explicite vtrumque terminum, referendo vnum ad alterum. dum vero concipio eandem ſub nomine *quantitatis,* concipiam rationem illam quaſi abſtractam, & per modum alicuius abſoluti, non attingendo explicite

explicite terminos, aut illos inter ſe conferendo. denique dum eandem concipio ſub nomine *denominatoris*, concipiam illam per modum ſignialicuius quod quantitatem rationis repræſentat.

Finis denominatoris eſt, vt per illum, tanquam per aliquid magis notum deducamur in cognitionem quantitatis rationis minus notam. hinc in numeris denominator rationis v. g. 9 ad 3, eſt ipſa illa ratio, ad minimos numeros deducta, nimirum ratio 3 ad 1, quia hi numeri notiores ſunt, maioribus. ſcribi tamen pro denominatore, tantum ſolet numerus 3, antecedens nimirum rationis 9 ad 3 ad minimos terminos reductæ, quia ille ſufficienter nos inducit in cognitionem quantitatis rationis: quare ille deinceps denominator appellabitur.

Prima denominatoris, rationis numeris expreſſæ, notio eſt. *Vt vnitas ad denominatorem, ita conſequens rationis terminus, eſt ad antecedentem*. ſit ratio quæuis 6 ad 2. denominator huius, eſt numerus 3, quia hic oſtendit rationem 6 ad 2 eſſe triplam: ſuppone tribus, vnitatem: quoniam denominator rationis 6 ad 2, in re eſt ipſa illa ratio ad minimos numeros ducta, erit ratio 3 ad 1 eadem quæ 6 ad 2. igitur vt 3 ad 1 ita 6 ad 2, & vt 1 ad 3 ita 2 ad 6. hinc

6 3
2 1

Secunda oritur denominatoris notio ab Eutocio inuenta: *denominator cuiuſcunque rationis ductus in terminum conſequentem, producit antecedentem*. Aſſumatur eadem ratio quæ ſupra 6 ad 2, cuius denominator eſt numerus 3. dico 3 ducta in 2 conſequentem rationis terminum, producere 6 antecedentem. cum enim ſit vt vnitas ad denominatorem 3, ita 2 conſequens, ad 6 antecedens, denominator 3, ductus in 2 conſequentem, producit idem quod antecedens 6 ductus in vnitatem: at 6 in 1 producit antecedentem 6, igitur & denominator 3 ductus in conſequentem 2, producit antecedentem 6.

Ex 2 hac notione demonſtrantur ſequentes duæ propoſitiones.

I.

A6 D3
B2 1F
C8 E4

Sint duæ rationes A ad B, C ad B, habentes commune conſequens: dico rationem AB eſſe ad rationem CB, vt A eſt ad C.

Reducatur vtraque ratio ad minimos numeros, & ratio quidem AB reducta fit ad DF, CB vero ad EF: erunt numeri D, E denominatores rationum AB, CB: quia vero denominator D ductus in conſequentem B producit antecedentem A: item denominator E ductus in conſequentem B, producit antecedentem C, erit vt A ad C, ita D in B, ad E in B: ſed vt D in B ad E in B, ita D ad E, igitur D eſt ad E vt A ad C, atque vt D ad E, ita ratio AB ad rationem CB, quia D & E illarum ſunt denominatores, igitur vt A ad C ita ratio AB ad rationẽ CB.

I I.

D3
B12
A2
C8

Sint duæ rationes A ad B, A ad C, commune habentes antecedẽs. dico rationem AB eſſe ad rationem AC, vt C eſt ad B.

Fiat vt C ad A, ita B ad D. erit igitur inuertendo vt A ad C ita D ad B, & A ad D vt C ad B. item vt ratio AB ad rationem AC, ita ratio AB ad rationem DB, ſed AB ratio, per præced. eſt ad rationem DB, vt A ad D: igitur & ratio AB eſt ad rationem AC, vt A ad D, id eſt vt C ad B.

PARS SECVNDA

De denominatore Proportionis.

D*Enominator cuiuſque proportionis, eſt magnitudo, quæ exprimit quantitatem proportionis.*

Sit quæuis propoſtio rationum v. g. 6 ad 2. 8 ad 4. reuocetur vtraque ratio ad minimos terminos, nimirum ad rationes 3 ad 1, 2 ad 1. proportio rationis 3 ad 1 ad rationem 2 ad 1, in re eſt verus denominator proportionis rationum 6 ad 2. 8 ad 4. quia vero ratio 3 ad 1 eſt ad rationem 2 ad 1, vt 3 ad 2, per primam præcedentis partis, erit ratio 6 ad 2 ad rationem 8 ad 4, vt 3 ad 2: & ratio 3 ad 2, denominator proportionis rationum 6 ad 2. 8 ad 4: quia ratio 3 ad 2, ſeſquialtera nimirum, exhibet quantitatem proportionis rationum 6 ad 2, 8 ad 4 eſſe ſeſquialteram.

Hinc patet denominatorem proportionis duarum rationum, in re quidem eſſe eandem proportionem ad minimos numeros deductam, ſcribi tamen & dici poſſe denominatorem proportionis duarum rationum eſſe rationem illam quæ reperitur inter antecedentes terminos rationum ad minimos terminos reductarum, quam deinceps denominatorem proportionum appellabimus.

A 6	C 12
B 3	D 2.

Prima denominatoris proportionis notio eſt: *ratio æqualitatis eſt ad denominatorem proportionis, vt conſequens proportionis terminus ad antecedentem terminum eiuſdem proportionis.*

H 6	E 2	G 1
	F 6	G 1

Sint AB, CD duæ rationes quæcunque, quæ reductæ ad minimos numeros, fiunt rationes E ad G, F ad G, erit proportio rationum E ad G, F ad G, in re verus denominator proportionis rationum AB, CD: quia vero ratio E ad G eſt ad rationem F ad G vt E ad F per 1. partis præcedentis, erit ratio E ad F etiam denominator proportionis rationum AB, CB. iam vero fiat vt G ad G vnitas ad vnitatem, ita F ad H, erit H æquale F & ratio HF æqualis rationi G ad G: item ratio G ad G erit ad rationem EF, vt ratio HF ad rationem EF. atqui per primam partis præced. ratio HF eſt ad rationem EF vt H ad E, igitur ratio G ad G eſt ad rationem EF vt H ad E. quia vero H eſt æqualis ipſi F, erit vt F ad E, ita H ad E, ſed vt F ad E ita ratio CD eſt ad rationem AB, cum F ſit denominator rationis CD, & E denominator rationis AB, igitur vt H ad E ita ratio CD eſt ad rationem AB: ſed vt H ad E ita ratio G ad G eſt ad rationem EF, igitur ratio GG (nimirum æqualitatis) eſt ad rationem EF (denominatorē proportionis,) vt ratio CD (conſequens proportionis terminus) eſt ad rationem AB, (antecedentem proportionis terminum.) hinc

Secunda oritur denominatoris proportionis notio: *denominator proportionis ductus in conſequentem proportionis terminum, producit antecedentem.*

A 4	C 6	E 2
		G 1
B 2	D 1	F 6

Sint duæ rationes AB, CD, & rationis AB denominator ſit E, rationis vero CD denominator ſit F. apponatur ratio æqualitatis G ad G. per 1. notionem, ratio æqualitatis G ad G eſt ad rationem EF denominatorem proportionis, vt ratio CD, conſequens proportionis terminus, ad rationem AB, antecedentem eiuſdem terminum: quatuor igitur rationes illæ ſunt proportionales: igitur ratio G ad G ducta in rationem

tionem A ad B, quarta in primam, producit idem quod ratio EF ducta in rationem CD, tertia in ſecundam: ſed ratio æqualitatis G ad G ducta in rationem A ad B producit rationem AB, igitur & ratio EF (denominator proportionis) ducta in rationem CD (conſequentem proportionis terminum) producit rationem AB, antecedentem eiuſdem terminum:

Ex hac notione ſequentes demonſtrantur propoſitiones.

I.

Sint duæ quæuis rationes AB, CD: fiatque vt D ad C ita B ad E, dico rationem AE ductam in rationem CD, producere rationem AB.

E8		
A6	C4	G3
B2	D1	H4

Rationis AB denominator ſit G, & CD rationis denominator ſit H: per 2. notionem ratio GH ducta in rationem CD producit rationem AB: Rurſum quia eſt vt D ad C ita B ad E, erit ratio CD æqualis rationi EB; & AB ratio ad rationem EB ſicut AB ratio ad rationem CD: ſed ratio AB eſt ad rationem EB, vt A ad E, ex ante demõſtratis, igitur & AB ratio eſt ad rationem CD vt A ad E: ſed AB ratio eſt ad rationem CD, vt G ad H, igitur A eſt E, vt G ad H, & AE ratio æqualis rationi GH; atqui ratio GH ducta in rationem CD producit rationem AB, igitur & AE ratio ducta in rationem CD producit rationem AB.

Hinc ſequitur rationem A ad E aque eſſe denominatorem proportionis rationum AB, CD, quam ſit ratio G ad H: cum ratio A ad E eadem ſit quæ G ad H: neque refert quod A non ſit denominator reſpectu rationis AB ſolitarie ſumpta, neque E denominator rationis CD ſolitarie ſumptæ, quia ad proportionum denominatorem nil aliud requiritur, quam vt ſit talis magnitudo, qua proportionis quantitatem exhibeat, quod aque facit ratio A ad E quam ratio G ad H, cum eadem ſit, licet termini magnitudine differant: deinde rationi A ad E aque conueniunt notiones denominatorum proportionum ac rationi GH: nimirum ratio æqualitatis ita ſe habet ad rationem AE, ſicut ratio CD ad rationem AB. item ratio AE ducta in rationem CD conſequentem proportionis terminum, producit rationem AB antecedentem eiuſdem terminum.

II.

Sint duæ quæuis rationes AB, CD, & ſit ratio FG quæ ducta in rationem CD producat rationem AB, dico rationẽ AB eſſe ad rationem CD vt F eſt ad G.

E12		
A9	C8	F
B3	D2	G

Fiat vt D ad C ita B ad E: per præcedentem ratio AB producitur ex ratione AE ducta in rationem CD, & ratio AB eſt ad rationem CD vt A ad E: ſed ex hypotheſi, eadem ratio AB producitur ex ratione FG ducta in rationem CD, idem igitur producitur ex ratione AE in rationem CD, quod ex ratione FG ducta in rationem CD: igitur AE ratio æquatur rationi FG, eſtque vt A ad E ita F ad G: ſed vt A ad E ita ratio AB ad rationem CD: igitur etiam vt F ad G, ita ratio AB ad rationem CD.

Hinc etiam ratio F ad G denominator eſt proportionis rationum AB, CD.

CAPVT SEXTVM.

De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum irrationalium.

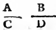
QVæ præcedenti capite dicta ſunt de natura & munere denominatorum rationum ac proportionum, numeris expreſſarum, omnino vniuerſalia ſunt, & denominatoribus rationum ac proportionum irrationalium conueniunt. quemadmodum enim rationes rationales in eo tantum ab irrationalibus differunt, quod illæ numeris exprimi poſſint, hæ vero non item; quæ differentia eſſentiam & naturam rationum non immutat, ita magnitudines quæ vtrumque rationum ac proportionum quantitates exprimunt, eſſentia & proprietatibus non differunt: quia tamen nonnulla in irrationalibus animaduertenda, malui ea quæ de harum denominatoribus dicenda ſunt, ſpeciali capite proſequi.

PARS PRIMA.

De denominatore rationis irrationalis ſolitariè ſumptæ.

DIco 1. nulla ratio irrationalis, proprie reduci poteſt ad terminos minimos: cum enim rationes illæ inter magnitudines exiſtant continuas, quemadmodum illæ in infinitum ſubdiuidi poſſunt, ita rationes illæ, in minoribus & minoribus ſemper terminis exhiberi poſſunt, neque erit vſpiam vbi ſiſtatur: *hæc aſſertio, rationibus etiam rationalibus conuenit, quantitate continuâ expreſſis.*

Dico 2. nulla ratio irrationalis, ad alios terminos reduci poteſt, qui prioribus per ſe ſunt notiores: cum enim omnes rationes alicui irrationali æquales, irrationales quoque ſint (aliàs enim eadem ratio rationalis ſimul eſſet, & irrationalis) omnes termini ad quos ratio irrationalis reduci poteſt, inter ſe ſunt æque incommenſurabiles: cum igitur eadem vbique terminorum ſit incommenſurabilitas, nihil eſt ex quo horum potius quam illorum terminorum habitudo per ſe notior ſit.



Aliter hac in re ſentit R. P. Vincentius Leotaudus, putatque rationem rectis lineis expreſſam, per ſe notiorem eſſe, quam ſit eadem per ſuperficies aut ſolida expreſſa, eo quod linea ſimpliciſſimam & vnicam dimenſionem habeat, ſuperficies vero duas, & ſolida tres obtineant. ſed bonâ illius veniâ, pluralitas illa dimenſionum quam ſuperficies & ſolida inuoluunt, nullo modo aſſertionem illius probat, aut contra noſtram euincit. eſto enim quod eſt veriſſimum, trinâ dimenſione conſtent ſolida, binâ ſuperficies, linea vnicâ & ſimpliciſſimâ, an idcirco ratio lineæ A ad lineam B, per ſe notior eſt, quam ratio ſolidi C ad ſolidum D? nullo modo: licet enim ratio ſolidi C ad ſolidum D ſit compoſita ex ratione altitudinis ad altitudinem, latitudinis ad latitudinem, profunditatis ad profunditatem, tamen nulla ex tribus per ſe notior eſt duabus reliquis, aut compoſitâ ex tribus, vnde neque hæc innoteſcit niſi ex datis, ſicut nec ratio lineæ ad lineam.

A C
B D

Dico 3. datâ quauis ratione irrationali, nihil determinatè aut completè de illa ſciri aut enuntiari poſſe, niſi ex huius cum altera comparatione: eſto AB ratio diametri ad latus quadrati,

quadrati, cum hæc terminis per ſe notioribus exprimi nequeat, concipiendo habitudinem A ad B, nulla de illa formari poteſt enuntiatio niſi identica, ratio A ad B eſt ratio A ad B, ſeu ratio diametri ad latus quadrati, & prætereà nihil. at ſi ratio AB conferatur cum alia quauis ratione C ad D, tunc demum aliquid de illa enuntiari poteſt: nimirum ratio AB, maior aut minor eſt ratione CD, aut huic æqualis.

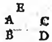
Dico 4. denominator cuiuſque rationis irrationalis (qualiſcunque ille ſit) nullum vſum habet reſpectu illius rationis ſolitariè ſumptæ: cum enim munus denominatoris ſit, diſtinctè exprimere quantitatem rationis tanquam minus notam per aliquid magis notum, nulla autem ratio irrationalis reduci poſſit ad alios terminos magis per ſe notos, nulla quoque ratio in aliis terminis dari poteſt, quæ munus illud denominatoris ſupplere poteſt. vnde ſiue detur denominator aliquis, ſiue non, patet illum, ſi detur, nullum vſum habere poſſe reſpectu rationis ſolitariè ſumptæ:

Dico 5. rationis irrationalis denominator in re eſt ipſamet ratio, in iiſdem quibus datur terminis. patet, quia nulla ratio, in aliis terminis illius quantitatem clarius & notius repreſentat.

PARS SECVNDA.

De denominatore proportionis.

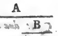
NOta 1. quamuis duæ rationes quæ conferuntur ſint irrationales, ita vt neutra numeris exprimi poſſit, non idcirco illarum proportionem eſſe irrationalem, ſed poſſe eſſe rationalem, & ſubinde irrationalem.



2. Licet nulla ratio irrationalis, aut illarum proportio irrationalis reduci poſſit ad minimos terminos, tamen, vt in aliquo ſiſtatur, tunc cenſeri proportionem duarum rationum ad minimos terminos reduci, quando duæ rationes proportionem conſtituentes, reducuntur ad commune conſequens, non qualecunque, ſed ad tale, quocum comparati antecedentes termini, faciunt rationes ſingulas, æquales earum ſingulis quæ reducuntur: ſint v.g. rationes AB, CD, fiatque vt D ad C, ita B ad E, erit B commune conſequens quæſitum.

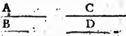
PARS TERTIA.

De Inuentione denominatorum, rationum irrationalium.



NOta, quod ſicut dum rationes rationales, quantitate continua v.g. lineis exprimimus, puta rationem 3 ad 1, lineis AB, quamcunque lineam liceat aſſumere pro vnitate, modo reliqua quæ antecedentem terminum exprimit, illi ſit proportionalis: ita in rationibus irrationalibus, quæcunque linea aſſumi poſſit pro vnitate, modo reliquæ quæ cum hac comparantur, ſint proportionales: nam ſicut vnitas numerica ſupponitur, pro quantitate digitali, palmari, pedali, cubitali &c. quamuis illæ magnitudines inter ſe valde diffe-

differant, ita viciſſim magnitudines illæ pro vnitate ſupponi poſſunt, vti & quæuis aliæ:



Sit ratio quæuis irrationalis AB: dictum eſt parte 2. huius denominatorem rationis AB, in re eſſe ipſammet rationē A ad B in iiſdem quibus datur terminis, quod eſt veriſſimum : tamen in ordine ad rationem AB comparandam cum alia, dico quamuis magnitudinem v.g. C aſſumi poſſe pro denominatore, & illi notiones omnes veri denominatoris competere.

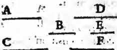
1. Enim ſi fiat vt A ad B ita C ad D, erit D vnitas, ad denominatorem C, vt B conſequens rationis terminus ad A antecedentem.

2. Denominator C ductus in B conſequentem terminum, producit A in D vnitatem. cum enim ſit vt D vnitas ad C denominatorem, ita B conſequens ad A antecedentem terminum, per elementa, D in A æquatur C in B.

Nota: dixi denominator C ductum in conſequentem terminum B, producit antecedentem A ductum in vnitatem D: non autem dixi ſimpliciter, producit antecedentem terminum A, prout in numeris dictum eſt: quia in quantitate continua v.g. lineis A, B, C, D: C in B non producit lineam ſed ſuperficiem, adeoque fit tranſitus de vna ſpecie quantitatis ad ſpeciem alteram: ſuperficies autem ex C in B nequit comparari cum linea A, niſi hac per ſimilem ductum tranferatur ad ſpeciem ſuperficiei, quod fit ducendo A, in vnitatem D: quod quidem etiam fit in numeris, ſed illâ tamen differentiâ, quod in ductu qui fit in numeris, producta non mutent ſpeciem quantitatis, ſed maneant in eadem in qua ſunt numeri producentes.

Ex his ſequentes demonſtrantur propoſitiones.

I.



Sint duæ rationes irrationales AB, CB habentes commune conſequens B. Dico rationem AB eſſe ad rationem CB vt A eſt ad C.

Sumatur quæuis linea D, fiatque vt A ad B ita D ad E, erit E vnitas & D denominator rationis AB, in ordine ad hanc comparandam cum alia ratione C ad B. fiat item vt B ad C ita E ad F, erit vt C ad B ita F ad vnitatem E, & F denominator rationis CB. quoniā D in B producit idem quod A in E, & F in B idem quod C in E; erit vt D in B ad F in B, ſic A in E ad C in E: ſed D in B eſt ad F in B vt D ad F, per elementa, & A in E eſt ad C in E vt A ad C, igitur vt D ad F ita A ad C: ſed quia D & F denominatores ponuntur rationum AB, CB, vt D ad F ita ratio AB ad rationem CB, igitur vt A ad C ita ratio AB ad rationem CB.

II.

A

Sint duæ rationes quæcumque AB, AC habentes commune antecedens A.

D *Dico rationem AB eſſe ad rationem AC, vt C eſt ad B.*

B Fiat vt C ad A ita B ad D: erit vt A ad C ita D ad B & vt D

A ad A ita B ad C, & vt C ad B ita A ad D: atqui per præceden-

C tem vt A ad D ita ratio AB ad rationem DB, igitur vt C ad B ita ratio

ratio A B ad rationem D B, ſed ratio D B per conſtr. eſt ratio A C, igitur vt C ad B ita ratio A B ad rationem A C.

III.

Sint duæ quæuis rationes non communicantes A B, C D: fiatque vt D ad C ita B ad E.

E

A C

B D

Dico rationem A B eſſe ad rationem C D vt A eſt ad E. quoniam eſt vt D ad C ita B ad E, erit E B ratio æqualis rationi C D: & ratio A B ad rationem C D, vt eadem ratio A B ad rationem E B: ſed per 1. huius ratio A B eſt ad rationem E B vt A ad E, igitur vt A ad E ita ratio A B ad rationem C D.

Aliter rurſum hic ſentit R.P. Leotaudus: negatque A & E eſſe aut dici poſſe denominatores rationum A B, C D, eo quod nec A exprimat habitudinem A ad B, neque E habitudinem C ad D. ſed non aduertit vir egregius quod ſicut ad denominatorem rationis ſolitariè ſumptæ nil aliud requiritur, quam vt ſit eiuſmodi magnitudo quæ rationis quantitatem exprimat & cui competant notiones denominatoris, ita ad denominatorem proportionis rationum nil aliud requiri quam vt is talis ſit magnitudo, quæ quantitatem proportionis exprimat, & cui competant denominatoris notiones, quorum vtrumque conuenit in caſu rationi A E: primo enim ratio A E exprimit quantitatem proportionis, cum ſit vt A ad E ita ratio A B ad rationem C D: ſiue eadem ſit habitudo rationis A B ad rationem C D, quæ eſt A ad E: ſecundo rationi A E conueniunt notiones denominatorum: nimirũ ratio æqualitatis eſt ad rationẽ A E, ſicut ratio C D conſequẽs proportionis terminus ad rationem A B, antecedentem eiuſdem terminum: item ratio A E ducta in rationem C D, producit rationem A B: quæ duo demonſtraui cap. 5. parte 2. vnde nil ad rem facit, ſiue A exprimat habitudinem A ad B, & E habitudinem C ad D, ſiue non: id enim ad denominatorem proportionis non requiritur, cuius vnicum munus eſt exprimere quantitatem proportionis; deinde licet A non exprimat habitudinem A ad B, exprimit tamen quantitatẽ illius habitudinis in ordine ad hanc comparandam cum alia habitudine: tanta enim eſt habitudo A ad B in ordine ad habitudinem C ad D, quanta eſt habitudo A ad E: neque vrget quod A in E vnicum tantum producat terminum, cum tamen ex definitione rationis cõpoſitæ, quantitas vnius rationis ducta in quantitatem alterius, efficere debeat rationem quæ duos requirit terminos, id inquam nil vrget: nam iuxta ipſummet P. Leotaud, in quantitate diſcreta v.g. rationum 6 ad 2, 8 ad 4 denominatores ſunt numeri 3 & 2 abſolute & ſine ordine ad vnitatem ſumpti: & tamen 3 in 2 vnicum tantũ producunt terminum 6, qui non eſt ratio, ſed collatus cum vnitate efficit rationem compoſitam: pari modo A in E licet vnicum tantum producat terminum, tamen hic collatus cum altero qui vices vnitatis ſupplet, dabit rationem compoſitam.

IV.

Sint duæ quæuis rationes non communicantes A B, C D: fiatque vt C ad D ita A ad E.

E

A C

B D

Dico rationem A B eſſe ad rationẽ C D, vt E eſt ad B. Ratio A B eſt ad rationem A E vt E eſt ad B per 2. huius: ſed ratio A E per conſtr. eſt ratio C D, igitur ratio A B eſt ad rationem C D, vt E eſt ad B.

V.

Sint duæ quæuis rationes A B, C D: & A in D producat F, C vero in B producat G.

D *Dico*

K

A C

B D

F G

Dico rationem A B eſſe ad rationem C D vt F eſt ad G. Fiat vt D ad B ita C ad K. eſt igitur vt D ad C ita B ad K; igitur per 3. huius, vt A ad K ita ratio A B ad rationem C D: ſed ratio A K compoſita eſt, ex ratione A C & ratione C K: ratio item F ad G compoſita eſt ex ratione A C & ratione D B (hoc eſt per conſtr. C K) igitur ratio A K ex iiſdem rationibus eſt compoſita ex quibus ratio F G, igitur A K ratio æqualis eſt rationi FG, eſtque vt A ad K ita F ad G: ſed vt A ad K ita ratio A B ad rationem CD, igitur vt F ad G ita ratio A B ad rationem C D.

VI.

A

B C

D E

Data ſit ratio A ad B quacunque, oportet exhibere duas rationes quæ ſint inter ſe vt A ad B.

Ponatur quævis C, fiatque vt B ad C, ita D ad E. Ratio A C eſt ad rationem B C, vt A C ratio eſt ad rationem D E, ſed ratio A C eſt ad rationem B C, vt A eſt ad B, igitur vt A ad B, ita ratio A C eſt ad rationem D E.

Quæ à Cenſore A A & ab Euthymio Grammatico in hac materia adferuntur partim adeo friuola, partim abſurda ſunt, vt laboris pigeat, illa vel referre.

CAPVT SEPTIMVM.

Digreſſio ad Clariſſ. virum A A.

EX quo opus Geometricum R. P. Gregorij à S. Vincentio in lucem prodiit, nulla Geometriæ pars æquè coli cæpta eſt, quam ea quæ de rationibus tractat. videbant enim viri in Geometricis acuti, quantum in rationum cognitione momenti, quantum ad omnem Geometriæ perfectionem opis ſitum eſſet: norant iidem, quam parum de rationum natura, illarumque vſu, nobis ab antiquis relictum ſit: atque adeo ex illis non pauci æqui rerum æſtimatores aſſerere non dubitarunt, Geometriam, quod rationibus diſſimilibus perinde ac ſimilibus iam vtatur, ex omnibus præter P. Gregorium cui debeat, habere neminem. quod ſi verum, vt eſt veriſſimum, mirari ſatis non poſſum, quo animo vir quidam Clariſſ. eum P. Gregorij librum, qui de proportionalitatibus inſcribitur, vt inutilem, nil noui continentem, innumeris ſcatentem falſitatibus, ipſum denique Auctorem infeliciter rationes contemplatum cenſere non dubitauit, quod veritatis indagandæ ſtudio factum ſi eſt, modeſtiam certè in verbis requiro, ſi vero quid aliud cenſuram illam protruſerit, facile patior in eo me ſuperari, in quo vincere longè eſt turpiſſimum, & quando Clariſſimi illius viri placita & cenſuræ ſæpius deinceps excutiendæ erunt, lubet totam rei ſeriem à principio paucis exponere.

Iam annus nonus agitur ex quo poſt opus Geometricum lucidatum, penitius in Galliis noſci cæpit illius auctor P. Gregorius. exinde frequentes doctorum hominum ad illum, & huius viciſſim ad illos litteræ: quos inter vir ille eſt Clariſſimus, quem ob cenſurarum centuriam quam in librum de proport. conſcripſit, meriti ergo, Cenſoris nomine deinceps compellabo. notitiam vt ſit, ſtudiorum peperit ſimilitudo; amicitiam, frequentes vtrimque litteræ. quia vero ea quæ vel ad propoſita-

rum

rum difficultatum ſolutiones, vel proportionalitatum explicationes pertinebant, litterarum terminis difficulter comprehendi poterant, præſertim cum è diametro oppoſitis vterque vteretur principiis, placuit Cenſori quæ in rem illam cogitarat, publico committere; quod ipſum Auctori per litteras ſignificauit; ſed & huic viri conſilium vehementer placuit, eumque à propoſito ne deſiſtat per litteras adhortatus eſt: vtriuſque votis hucuſque temporum obſtitit iniuria, & præli difficultas. id tamen à Cenſore impetrauit Auctor, vt eorum quæ adornarat exemplar deſcribi, & ad ſe tranſmitti curarit: quæ quia pluribus in Gallia, aliiſque alibi communicauit Cenſor, fruſtraque illorum prælum iam ſexennium ſperauit Auctor, bonâ illius veniâ, libri titulum, nouæque doctrinę compendium, fideliter hîc apponam: Nomen Cenſoris non edo, tum quia ſua necdum in lucem protulit, tum quia, vbi ea intelliget tam ab omni veritate aliena, vt ſequentibus oſtendam capitibus, illorum noſci auctor & haberi nolet. libri titulus eſt huiuſmodi.

A.A. TRACTATVS DE RATIONIBVS

In quo quæcunque tum Euclides in quinto Elementorum libro de rationibus ſimplicibus, tum alij de ſimplicibus & compoſitis propoſuerunt, quindecim Theorematis comprehenduntur.

Vna cum Cenſura integri libri de proportionalitatibus, quem in opere geometrico de quadratura circuli inſcripto, inſeruit R.P. Gregorius à S. Vincentio,

Et confutatione eius tum circuli tum hyperbolæ Quadraturarum.

Doctrinæ nouæ de Rationibus compendium.

1. *Oſtendo inquit 1. rationes veras eſſe magnitudines, quod eis vera quantitatis proprietas conueniat, poſſe ſcilicet conſiderari ſecundum maius & minus, cum dentur rationes aliis maiores vel minores.*

2. *Tum inquiro ex proprietatibus rationum, in quo cum aliis magnitudinibus conueniant; & inuenio rationes ſequi progreſſionem Arithmeticam, quando termini ſequuntur geometricam; vnde cum omnes progreſſiones Arithmeticæ ſint proportionales, oſtendo, loco rationum poſſe ſumi quamlibet progreſſionem arithmeticam, quæ eas repræſentet; ita vt rationes eam ſeruent inter ſe proportionem, quam ſeruant differentiæ progreſſionis arithmeticæ, reſpondentis terminis rationum, qui progreſſionem geometricam conſtituunt: quæ cum nihil aliud ſint quam numeri ſeu quantitates, quas vocant Logarithmos, ex logarithmorum proprietatibus, quæ de rationibus ſciri poſſunt, deduco.*

3. *Quia vero tum logarithmi, tum rationes optimè repræſentantur per ſpatia hyperbolica, quæ à rectis alteri aſymptoto parallelis, includuntur, (vt iam de logarithmis notatum aliis, & nouiſſime P. Saraſſa) quæ hucuſque dicta ſunt, ſiue per numeros, ſiue per lineas, optime per hyperbolam confirmabuntur.*

 4. *Oſtendo*

4. *Oſtendo deinde, quod ratio æqualitatis, nullam habeat quantitatem; ſed ſit quaſi zero vel punctum; cum inter duos numeros æquales, nulla ſit logarithmorum differentia, item inter duas æquales lineas nullum ſpatium hyperbolicum includatur: vnde cum ratio quæuis inæqualitatis aliquam quantitatem habeat, nulla autem ſit inter numerum quemuis, & punctum vel nihilum, nulla item inter punctum & lineam ratio, nullam quoque inter quamuis rationem inæqualitatis, & rationem æqualitatis intercedere poſſe proportionem: item rationem æqualitatis alteri additam, non facere quid maius &c. atque hinc pendet quam maxime methodus, confutandi errores quos in ſuo libro de proport. accumulauit Gregorius à S. Vincentio: nam ex 172 propoſitionibus vix 70 vera ſunt, eaque vt plurimum nota.*

5. *Vnde ſequitur, quod Euclidi aduerſatur, inter 1 & 4 maiorem eſſe rationem, quam inter 1 & 2: cum maior ſit differentia logarithmorum inter 1 & 4, quam inter 1 & 2. quæ cum nemo hactenus aduerterit, non mirum, ſi quando de proportionibus inæqualibus tractatur, fere vbique peccetur.*

6. *Sicut eſt eadem differentia inter logarithmos duorum numerorum quomodolibet ſumantur, vt inter 8 & 1, vel inter 1 & 8, nempe † 3 vel — 3. ita eadē eſt quantitas rationis inter duas magnitudines ſiue maior comparetur cum minore, ſiue minor cum maiore.*

7. *Rationes diuerſi ordinis nullo modo inter ſe poſſunt comparari: neque enim ratio maioris inæqualitatis poteſt dici maior aut minor ratione minoris inæqualitatis.*

8. *Sequitur etiam quod rationis compoſitio nil ſit aliud quam rationum vnio, ſiue fiat additio ſiue fiat ablatio: quod explicatur per duos motus contrarios.*

9. *Tot errorum vnica eſt cauſa, quod Gregorius à S. Vincentio rationes conſiderauerit vt fractiones.*

Hæc ſunt præcipua doctrinæ illius capita & fundamenta; quæ qualia ſint ſequentibus oſtendam capitibus; quod autem ſit P. Gregorij de illis iudicium, ex ipſis quas ad Cenſorē tranſmiſit litteris, facile erit colligere.

Litteræ R.P. Gregorij ad Clariſſ. virum A. A.

VEnerunt in manus meas feliciter lucubrationes tuæ diu expectatæ; quibus obiter decurſis, hæc habeo quæ reponam: gaudeo & gratulor tibi corde ſincero, quod nullum impreſſorem huc vſque nactus fueris, qui eas publici iuris faceret; & caſu quo mei gratia hoc pronunciare me cenſeas, per me licet vt vulgentur, ſed prælo; vt iis Geometræ perlectis, expectēt reſpōſum ad eaſdē, velà me vel ab vno è meis diſcipulis, qui talē ſpartam perlubenter arripient. Ex 172 propoſitionibus quas libro de proportionalitatibus conſcripſi, vltra centum erroris damnas, ego viciſſim totidem falſas aſſero in ſcripto quod ad me miſiſti, præter ea quæ ad condemnandas meas quadraturas adiunxiſti. petiiſti à me candidum reſponſum, en habes mi A. A. gratias tibi egi pro cenſura propoſitionis cuiuſdam lib. de hyperbola, ad me tranſmiſſa: & maiores ac diductiores (ſi meas lucubrationes de proportional. non ſubſiſtere docuiſſes) parauẽram gratiarum actiones, cum autem tuum ſcriptum me in mea doctrina data magis confirmarit, æquo animo ſpero feres, ſi eodem candore quo prius agnoui errorem (licet meus non ſit) de tuis iudicium meum ſcripſerim. Crudeles difficultates mihi inciderunt dum librum illum commiſcerer; ſed Deo laus omnes tandem mihi in puriſſimam doctrinæ con-

firmatio-

ſirmationem euaſerunt:ſic etiam à te motæ difficultates, ob viſas à me ſolutiones,parem exitum ſortitæ ſunt. Veritatis intereſſe exiſtimas, vt geometras de erroribus qui in librum meum irrepſerunt admoneam, ne forte in eos impingant:facerem, moremque tibi gererem ſi eos agnoſcerem:nec mihi obeſſe cenſeo tam altum hucuſque Geometrarum ſilentium, quod arbitraris pluribus fore præiudicio:ſi quis Geometriæ amicus hanc ſibi ſcribendi anſam arripuerit (quod auidiſſime expecto) vel mihi occaſionem præbebit rationum materiam penitius intuendi,vel me à variorum non rectis ſuſpicionibus eximendi.quæ de ſcripto Patris Saraſſæ adiuncta inuenio, eidem relinquo, ipſe ſibi ſufficit: ætatem habet,doctrinamque, ſed & calamus ei non deerit, ſi eum probè noui, vt quæ non recte damnata fuerint,ab errore vindicet &c. en animi mei ſenſum habes ita libere pronunciatum,atque ille quem ſcriptum tuum continet. vterque in eo conuenimus quod Geometriam illuſtrare ac promouere intendimus, committamus nos igitur communi totius orbis arbitrio,vt à ſpiritu contradictionis liberi maneamus iis animis inter nos, quibus eſſe non ita pridem cepimus &c.

Habes erudite lector iudicium R.P. Gregorij, nullâ animi perturbatione conceptum,nullâ verborum acrimoniâ expreſſum,ſed candore ſummo ad Cenſorem perſcriptum.

CAPVT OCTAVVM.

Digreſſio ad Euthymium Grammaticum.

EST hoc Grammaticis nonnullis, non quaſi præſcriptione obtentum, ſed veluti ex hæreditate ius,in alienis ſcalpturire ſcriptis, quæ non intelligunt arrodere,de commate & puncto,de voce ac nomine, de lana caprina non ſecus ac de orbis imperio decertare; de ſuo nil niſi quiſquilias & nugas proferre pueriles.quoddum egere, tum vero quaſi Ioui fulmen extorſerint aut Tygranem bello ceperint vt Romanam Rempublicam diuturnâ tyrannide liberarent, mirifice ſe circumſpiciunt, applaudunt ipſi ſibi,& quidem ſoli,domi foriſque,in muſæo ac foro, voce & ſcriptis:hinc ad faſtidium & nauſeam, & ſputa vſque pulmonum has aut ſimiles identidem tibi voces occini intelliges:

Appendix,ſcribendum adpendix:appono, appellabo, apparet,ſcribendum,adpono,adpellabo,adparet:

Determinata,ſcribendum diſterminata vt habeo in vetuſto codice membranaceo.

Argumenta,optimè membranæ,augmenta.

Inepta hæc ſunt initio adeoquè corrupta: pro τὸ μὲν λόγος, vertendo legi τὸ μὲν δύο.deinde eiecta voce δύο,ſcribo,τὸ δὲ μεγαθῶν

Non vidis hoc Gogauinus,reſtituendum eſſe verbum διαφερόντων

Gogauinus inſcite & confuſe.

Ita emendauit lectionem quam omnes habebant.

Omnes male legebant & diſtinguebant.

Ad hæc,nulla pagina,græculâ voce caret:quod ſi auctoris Græci tria verba proferendi ſit occaſio,quæ latine deinde ſubiiciantur, ſolem nimirum digito attigere,in cælum ituri, dominus ſi iuſſerit.

Ferenda tamen vtcunque Grammaticalis hæc eſſet oſtentatio,ſeu potius

tius ineptia, niſi in omnes alias ſcientias, quas vix à limine conſpexere, & primis vt aiunt labris delibarunt, pædagogico ſupercilio, ac dictatoriâ incurrerent poteſtate. vnum dumtaxat alterumúe, ex hoc genere in medium proferam, & primo quidem Ioſephum Scaligerum: is è Grammatico & dictatore philologo, factus repente Geometra, eo arrogantiæ ac veſaniæ deuenit, vt Archimedem inſcitiæ & paralogiſmorum accuſare, Dinoſtratum plagij reum agere, Heronem & Apollonium oſtentationis arguere, Eratoſtenis & Nicomedis præclara ad cubi duplicaturam inuenta irridere, Priſcos denique ab vno ſe vinci omnes pronuntiare & ſcribere non erubuerit: at non impune hæc ipſi ceſſit arrogantia: huiuſmodi enim minerual, ex merito, tulit, à Bartholomeo Souuero, aliiſque præclaris id temporis viris: *omnium ageometrarum inſcitiam infinito interuallo ſuperauit Ioſephus Scaliger, bipedum omnium quotquot fuerant, ſunt, & aliis erunt in annis, ne Orontio quidem Finao excepto ἀγεωμετρητότατος in ſuis elementis cyclometricis.*

Ioſephi arrogantiam, & iactantiam intolerabilem, pæne hoc anno ſuperauit Euthymius grammaticus, in omni litterarum genere Ioſepho longe inferior: is vltra crepidam iam pridem ſuetus ſapere, ea typis euulgare auſus eſt, quæ homini ſano vel incidere potuiſſe, nemo qui illæſo eſt cerebro, crediderit. audite quotquot eſtis toto orbe geometræ, audite Thraſoniſmos Grãmatici intolerabiles, calumnias in optimos quoſque Geometras inſignes, monſtroſos in tota Geometria errores, quos omnes caſtigare ſi quis voluerit, Augiæ ſtabulum expurgarit citius, quã illos vel numerarit: adeo nulla pæne eſt pagina, quæ non tot ſtupendas hallucinationes, & ineptias, quot lineas & pæne verba contineat. paucula ex ſingulis generibus deligam, vt ea lecturi qui ſunt, intelligant, quam ex merito & vero hæc à me dicta ſint.

Thraſoniſmi Euthymij Grammatici.

PRæfationem ad lectorem, his orditur verbis: *Quod orbis litteratus gaudeat, poſteritas gratâ memoriâ recordetur, Primi nouas Geometricarum rationum leges in natura deteximus; & falſas propoſitiones in eo libro inuenimus, quem vltimæ antiquitatis diuini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides ex Aegyptiorum & Patriarcharum inuentis condiderunt, omnium autem ſæculorum præcipui philoſophi ac ſapientes legendo examinarunt.*

Mox vbi ſe Chriſtophoro Columbo noui orbis inuentori, comparauit, hæc ſubiungit. *Quod ſi vel tanto minus inuentum noſtrum cenſeretur, quanto maius eſt falſum inueniſſe, quod omnes ſapientes verum credebant, quam noui aliquid in eo reperiſſe, de quo multi ante dubitarunt, tamen & Deo O.M. humillimas gratias agere deberem, qui ad aliquam in natura fundatam veritatem ratiocinando inueniendam, ingenium ſuffecit, & diſciplinis mathematicis gratulari quod certiora impoſterum tradere poſſint.*

Tum paucis interiectis, quibus ait ſubtilitates Clauij ad defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. ſe nullâ ingenij vi in adoleſcentia penetrare potuiſſe: ita pergit: *illo autem tempore tot locorum in deſperatis auctoribus reſtitutione, quaſi perpetuis victoriis animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum in ſcientiis, quæ quidem ratione aliqua conſtitutæ eſſent, inueniri arbitrabar, vt ſi ingenij neruos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem.*

Ruſſus infra: *vtramque hanc difficultatem* (vnam, quales fuerint triremium

maiorum-

maiorumque nauium ordines, alteram quod genus nauium fuerint hemiolia & trieremiolia) *quæ ſummos viros hactenus torſerat &c. notis ad Vitruuium, nouâ ſed breui admodum explicatione* Primus *ſuſtuli: porro vnde hemiolia dicta ſit* Primus *quoque ex Etymologico magno docui:*

Pag. 9. vbi paucis dixit quintum elementorum librum à Pythagora & Eudoxo concinnatum fuiſſe: hæc addit. *Sed ſi dicere auſim, ad rei veritatem, quod naturæ veſtigiis non inſiſterent, in hac contemplatione non omnino penetrarunt. quædam autem quæ veteres rectè docuerant, ſiniſtrâ recentiorum interpretatione ſunt deprauata: Itaque & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non intellexerunt, & antiquos corrigam, qui malè quædam prodiderunt, vtroſque inſuper noua docturus.*

Pag 101. *ſed nec Theo hoc intellexit, nec ex poſterioribus mathematicis ad noſtra vſque tempora vllus.*

Pag. 102. *euidentiſſimis exemplis & ex media turba petitis caſum illuſtratarus, quæ rerum naturam preſſo veſtigio ſequendo, in rationum Geometricarum doctrina* Primus *omnis antiquitatis, inuenit Euthymius.*

Pag. 126. *ex parte autem hoc principium Euclides admiſit, nempe in rationibus exceſſiuis: ſed generaliter in omnibus rationibus defectiuis, huius dogmatis veritatem,* Primus *oſtendo.*

Pag. 127. *Quare cum præcipuus huius narrationis mihi ſcopus ſit, vt totam antiquitatem ignoratæ in quibuſdam elementis Geometriæ conuincam, deinde autem iuniorum prauas explicationes & monſtroſas hallucinationes demonſtrē: antiquis hunc honorem habebo, vt primi demonſtrationum viribus adacti, veritati victoriam concedere cogantur.*

Pag. 146. *minutiarum conſideratione deceptos fuiſſe antiquos, ingenioſè vidit Euthymius.*

Eccum Lector Geometra ex millenis Grammatici Thraſoniſmis, paucos: nulla pagina non aliquot continet: vix vnquam Euclidem, Archimedem, Apollonium, Hermotymum loquentes inducit niſi aliquid in laudē Euthymij dicant.

Calumniæ Euthymij Grammatici in præcipuos Geometras.

IN præfatione ad lectorem. *Rodulphi Volumnij, inquit, Tractatus de proportione proportionum, niſi meliora habeat, quam quæ ex ipſo Clauius protulit, Voluſij annalibus inſertus potius periiſſet, quam vt mathematicos in erroribus confirmaret.*

Huius autem errores (nimirum Gregorij à S. Vincentio) *quod plane inſignes ſint totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi, vt omnes viderent, in circuli quadratura perficienda non plus noui quam falſi fuiſſe repertum. enimuero ab inuenta matheſeos tempore, nullum fuiſſe puto, qui plus centum & triginta falſas propoſitiones ex vno erroneo principio deduxiſſet.*

Quod ſi illa quæ ex antiquis perperam verſa ſunt, etiam à frederico Commandino, græca lingua mediocriter perito examinare vellem, rebus mathematicis non paruam lucem me allaturum ſperarem.

Pag. 81. *Boetius vertendo hæc, ita modo ſuo collegit, vel potius diſiecit lib. 1. Arithm.*

Pag. 87. *ex iis quæ hactenus diſſerui, liquere poteſt, ex interpretibus nullum quid* πηλικότης *eſſet, percepiſſe.*

Pag. 88.

Pag 88. *nec egregium illud ſcholium pag.12. adpoſitum Commandinus intellexit.*

Pag.100. *hunc vero errorem* (nempe rationem 6 ad 1, duplam eſſe rationis 3 ad 1) *ampliauit Gregor. à S. Vincentio; qui grande illud opus Geometricum de quad.circuli ante 7 annos edidit: ſi effectum ſpectemus, conatu ſolo laudabile: ſic vt ſcopum feriret, de rationum proportionibus ſeu vt ipſe cum Boetio vocat proportionalitatibus geometricis protulit noua inuenta, reuera autem noua errata: namque in ſolo 8 libro, qui huius doctrinæ fundamenta continet, 117 falſas propoſitiones numerauit Euthymius.*

Pag.127. *nulla autem ex omni antiquitate mathematica, illuſtrior propoſitio proferri poteſt quam hæc ſit 8 Archimedis lib. 2. de ſphæra & cylindro, in qua, toties dicatur quæ ratio maior ſit quæ minor, quæ alterius dupla quæ ſeſquialtera: in quo cum Theone, iuniores omnes & in primis Gregorius à S. Vincentio tam ample errarunt.*

Pag.160. *in poſteriore demonſtratione propoſ. eiuſdem 8. lib. 2. de ſph. & cyl. rectangula in laterum rationes defectiuas reſoluendo, paralogiſmum Archimedes commiſit, quem ex veris Euthymij elementis corrigendum hactenus demonſtraui.*

Pag.167. *ex his perſpicuum eſt non tantum ignoraſſe illos auctores* (Theonē, Cardanum, Volumnium, Clauium &c.) *quid ſit rationum compoſitio, ſed & quid ſit ratio.*

Pag.195. *dum* (P. Gregorius à S. Vincentio) *dicit duos rationes componendi modos aſſignari poſſe, quorum alterum deinde additionem vocat, alterum multiplicationem, quid vocabulum, Compoſitio, ſignificet ignorauit.*

Ibid. *vna igitur eſt rationis vera compoſitio quam illa definitione Euclides tradidit: huic autem iuniores quod rerum naturam in Canonicis nunquam conſideraſſent, adeoque quid ratio eſſet ignorarent, monſtroſam & contra naturæ decreta natam rationis compoſitionem adiunxerunt.*

Synopſis doctrinæ Euthymij Grammatici.

1. DEfinitionem Rationis ab Euclide datam (nimirum Ratio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis ſecundum quantitatem habitudo) ita vult intelligi vt *τὸ ſecundum quantitatem* non magnitudinum notioni, ſed relationis notitioni coniungi debeat, vt ſenſus ſit, ſecundum quantitatem ſeu in quanto continuo, vel quantitate capiendam eſſe relationem, non autem ſecundum quotitatem ſeu in quoto diſcreto, vel numero. adeoque relationem illam duarum magnitudinum ſpectari tantū debere, in quantitate continua & magnitudine, non autem in quotitate & multitudine.

Atque hinc toties Antiquis & modernis obijcit, quod non intellexerint quid ſit ratio.

Vlterius: rationes quarum antecedentes termini maiores ſunt conſequentibus, *exceſſiuas* vocari vult, quarum vero antecedētes minores ſunt conſequentibus, *defectiuas*: quas ait *inepte* à recentioribus vocari rationes maioris & minoris inæqualitatis.

2. Ratio æqualitatis, ratio quidem eſt, ſed ratio nihili, ſicut in logiſtica eſt ô, adeoque nullam habet quantitatem; & eſt omnium exceſſiuarum, & defectiuarum minima: *punctum hoc reſpondet puncto 4. doctrinæ Cenſoris A A. cap. præcedenti.*

3. Ratio

3. Ratio inæqualitatis comparari nequit cum ratione æqualitatis: id enim idem eſſet, acſi numerum aliquem, rationem habere dicerem ad nihilum ſeu ad cifram ô. *reſpondet hoc, puncto* 4. *Cenſoris A A.*

4. Ratio 4 ad 1 quadrupla, æqualis eſt rationi ſubquadruplæ 1 ad 4, quia æqualiter diſtant à ratione nihili, illa excedendo, hæc deficiendo: tamen quadrupla ratio non eſt eadem quæ ſubquadrupla: *idem eſt cum puncto* 6. *Cenſ. A A.*

5. Ratio exceſſiua (id eſt maioris inæqualitatis) comparari nequit cum ratione defectiua (id eſt minoris inæqualitatis) quod diuerſi generis ſint: comparatio autem eiuſdem generis nomina requirit: *vid. punct.* 7. *Cenſ. A A.*

6. Nullo modo diuerſæ progreſſionis rationes inter ſe comparari poſſunt, vt definiatur quam inter ſe rationem habeant, quamuis illarum differentialis ratio ſit notiſſima: quare ratio 2 ad 1 ineffabilem rationem habet ad rationem 3 ad 1. & illa huic incommenſurabilis eſt.

7. In rationibus exceſſiuis, verum eſt, quod maior ad eandem, maiorem habeat rationem, quam minor ad eandem: vt hic ratio 7 ad 4, maior eſt quam ratio 5 ad 4. verum item eſt in exceſſiuis, eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam eadem ad maiorem: vt hic ratio 6 ad 3 maior eſt ratione 6 ad 4. at in defectiuis falſum eſt, quod maior ad eandem, maiorem habeat rationem, quam minor ad eandem: nam ratio 4 ad 6 minor eſt ratione 3 ad 6. falſum item in defectiuis, quod eadem ad maiorem, minorem habeat rationem, quam eadem ad minorem: nam ratio 4 ad 5 minor eſt ratione 4 ad 7. *idem hoc eſt cum puncto* 5. *Cenſoris A A.*

Quare nouam propoſitionem & Euclidæâ generaliorem efformamus: duarum inæqualium magnitudinum, illa ad eandem, vtrâque aut maiorem aut minorem, aut alterutri æqualẽ, maiorem rationem habet, quæ longius ab hac diſtat, & viciſſim:

8. Compoſitio rationis nil aliud eſt quam rationum additio. quin ratio per rationem multiplicari nequit, multo minus per numerum aut magnitudinem. quod ibidem per motus contrarios explicatur. *punctum hoc idem eſt cum* 8. *Cenſoris A A.*

9. Hoc autem maximè animaduerſione dignum, non tantum falſa Gregorij Theoremata, ſed & omnes veterum ac iuniorum paralogiſmos ex eo fonte manaſſe, quod Geometricas rationes & minutias Atithmeticas eandem contemplationem admittere putarint. *& hoc idem eſt cum puncto* 9. *Cenſoris A A.*

Hæc noua illa ſunt inuenta, de quibus Orbis litteratus gaudere debeat, & tota Geometria ſibi gratulari, certiora deinceps tradere quod poßit: Plagij interim inſignis, Euthymium accuſo, quod omnia hæc dogmata (quorum Primum ſe inuentorem toties iactat) à Cenſore A A, volente an nolente, neſcio, mutuatus ſit: quod quiuis qui hæc cum Cenſoris doctrina capite præcedente relata, contulerit facilè indicarit.

Euclidis, Archimedis, aliorumque antiquorum propoſitiones, partim falſitatis partim malæ demonſtrationis ab Euthymio Grammatico condemnatæ.

PAg. 126. *Falſa eſt igitur propoſ.* 8. *lib.* 5. *elem. &* 10. *& multa alia quæ ab his dependent. falſa item eſt definitio* 7. *lib.* 5. *multa autem propoſitiones vete-*

rum quamuis falſæ non ſint, male tamen ex his elementaribus demonſtrata: male enim Euclides hac 8. quinti vſus demonſtrauit eiuſdem libri propoſ. 14. 20. 21. male quoque Archimedes ex eadem demonſtrauit propoſitionem 2. lib. 1. de ſphæra & cylindro, ad quam Eutocius commentando multas erroneas propoſitiones ex 8. lib. 5. deductas protulit: quas ante ipſum Pappus lib. 6. Collect. produxerat.

Ex illa quoque 8. propullauit inſignis illa paralogiſmorum ſeries in ſecunda demonſtr. propoſ. 8. lib. 2. de ſphæra & cylindro.

Pag. 153. *Porro cum rationes exceſſiuæ & defectiuæ inter ſe comparantur, falſæ quoque ſunt in adiunctis lib. 5. propoſ. 31. 32.*

Octo igitur vniuerſim falſas propoſitiones in 5. elem. lib. notauit Euthymius, veterum præterea aliquas, quas in Pappo Euthymius notauit: nempe lib. 7. propoſ. 11. & 12. deinde 14. Porro falſæ ſunt propoſitiones 180. 181. 187. ex parte autem male demonſtratæ propoſ. 232. 233. 234. quæ ſunt tria lemmata, in quorum ſingulis hallucinatus eſt Commandinus.

Pag. 160. *in poſteriori demonſtratione propoſ. 8. lib. 2. de ſph. & cyl. paralogiſmum Archimedes commiſit.*

CAPVT NONVM.

An Logarithmi aut ſpatia hyperbolica ſint rationum denominatores.

PErlectis iis, quæ toto de rationibus tractatu docet Cenſor, ex vno omnia errore, veluti ex ſcaturigine profluxiſſe video; exiſtimauit ille, rationum naturam adeo à multiplicatione dependere, vt illæ vel conferri inter ſe non poſſint niſi ſecundum multiplicationem, vel citra illam nullus earum ſit vſus. hinc ad Logarithmos rationum transtulit quantitates, à logarithmis ad ſpatia hyperbolica, ab his deniq; in reliquos omnes, eoſque fœdiſſimos errores delapſus eſt: ita vt merito de illo dici poſſit (quod falsò de auctore pronunciauit ipſe) *vix nobilius exemplum adferri poſſe, quo oſtendatur, quam periculoſus ſit error in principiis.*

Atque illam errorum partem, quæ rationes aliter inter ſe conferri non poſſe docet quam ſecundum multiplicationem, manifeſtę falſitatis conuici cap. 3. huius; ea modo refellenda reſtat, quæ rationum quantitates ad logarithmos, & ſpatia transfert hyperbolica.

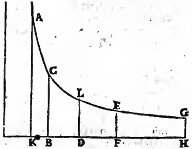
Quæro igitur à quo tempore & quibus vnquam geometris, rationum denominatores, & logarithmi hac ætate nati, res inquam tam diuerſæ, vna eademque fuerint? certum eſt nullum ex omnibus, qui ad hanc vſque fuere diem, præter Cenſorem, duo illa tam diſparata confudiſſe: humano capiti caudam ſi pictor equinam iungat, & dicat hæc tam diuerſa, rem ſibi vnam eandemque eſſe, nonne ingens pueris ludibrium debebit? eadem tibi cauſa eſt: age, videamus quid ab omnibus retro ſæculis, per rationum denominatores Geometræ, quid per logarithmos, primi eorum Auctores intellexerint, & ilico patebit, quale monſtrum in Geometriam inuexerit Cenſor.

Denominatores, ſecundum omnes tam antiquos quam recentiores ſunt magnitudines, quæ exprimunt quantitates rationum & proportionum: nimirum an ſit dupla, tripla, quadrupla, aut vna ſit maior minorúe alterâ aut illi æqualis.

Loga-

Logarithmi, ſunt exponentes magnitudinum continue proportionalium; id eſt numeri, qui deſignant quota ſit vnaquæque continue proportionalium à prima eiuſdem ſeriei: ſiue ſunt numeri, qui oſtendunt quoties ratio primæ proportionalis ad ſecundam, contineatur per multiplicationem, in rationibus eiuſdem primæ proportionalis ad quamuis continue proportionalium.

Quis amabo vel leuiter in Geometria verſatus, non videat immane quantum duo illa inter ſe differant? denominatorum munus eſt, exhibere quantitatem rationis, id eſt an vna ratio ſit alterâ maior, minorúe, aut illi æqualis: logarithmorum munus eſt, exhibere, quoties vna ratio ſit alterius in eadem ſerie multiplicata, v.g. an duplicata, triplicata &c. quæ duo tantum inter ſe differunt, quantum ratio multiplex à multiplicata, dupla à duplicata, tripla à triplicata, quas ſpecie differre oſtenſum eſt cap. 3. huius. Logarithmi igitur neque ſunt neque vllo modo eſſe poſſunt rationum denominatores.

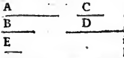


A logarithmis ad ſpatia deuenio hyperbolica: demonſtrat Auctor oper. Geom. lib. 6. prop. 130. ſpatia hyperbolica à rectis alteri aſymptotorum paralelis intercepta, v.g. ſpatia A B, C D, L F &c. æqualia eſſe inter ſe, ſi lineæ AK, CB, L D &c. fuerint continue proportionales. ſi verò rectæ illæ fuerint quæcunque non proportionales, oſtendit propoſ. 129. ſpatium A B tam multiplex eſſe ſpatij C D, quam ratio lineæ A K ad C B, multiplicata eſt rationis C B ad L D: ſiue ſpatium A B toties per additionem continere ſpatium C D, quoties ratio A K ad C B. per multiplicationem continet rationem C B ad L D: idque vniuerſaliter.

Speculationem hanc pulcherrimam primus & feliciſſime logarithmis applicuit P. Alphonſus de Saraſſa, & ipſe Geometra egregius, docetque totam logarithmorum doctrinam, optimè & faciliimè explicari per hyperbolam: cum ſpatia faciant progreſſionem Arithmeticam, quando lineæ quæ ſpatia intercipiunt, faciunt progreſſionem geometricam: & cum hucuſque tota logarithmorum ſcientia de illis tantum fuerit quantitatibus, quæ intra ſeries proportionalium exiſtunt, per hyperbolam vero ad eas etiam extendatur magnitudines, quæ extra ſeries exiſtunt, immenſa hæc ſcientiæ logarithmicæ extenſio & perfectio, tota vni debetur Patri Saraſſæ.

Adinuentionem illam, rationum quantitatibus, infeliciſſime applicuit Cenſor; atque ita vult rationes ſequi ſpatia hyperbolica, vt illæ per hæc, tanquam per denominatores, repræſententur; additque, non plura de rationibus ſciri poſſe, quam de ſpatiis hyperbolicis. verùm cum ſpatia hyperbolica, nil aliud repræſentent aut repræſentare poſſint, quã quoties rationes linearum ſpatia includentium, ſe inuicem per multiplicationem contineant, denominatorum vero munus ſit exhibere, an vna ratio ſit maior alterâ minorúe, aut illi æqualis, (quæ duo ſpecie differunt) euidens

eſt ſpatia hyperbolica nec eſſe neque vllo modo eſſe poſſe rationum denominatores.



Deinde datæ ſint rationes duæ;& AB quidem maioris inæqualitatis CD vero minoris; certum eſt illas ſecundum multiplicationem inter ſe comparari non poſſe,ſiue non poſſe exhiberi,an,& quoties vna ſit alterius multiplicata; an nullos tamen illæ habebunt denominatores, nullam proportionem quæ exhiberi poſſit?ridiculum. fiat vt D ad C ita B ad E, erit AB ratio ad rationem CD, vt A ad E, vt demonſtraui cap.6.huius:

Rurſum datis duabus rationibus,ſi quis petat exhiberi tertiam aut mediam proportionalem,illene petit, datis duobus ſpatiis hyperbolicis inæqualibus,exhiberi medium aut tertium proportionale?hoc qui dabit,meſolabium abſoluit:at prius exhiberi poſſe abſque meſolabio, nemo negauerit geometra, vide lib.8. propoſ. 141. 142. 143.144. alia igitur & plura de rationibus peti & ſciri poſſunt, quam aut ſpatia hyperbolica aut logarithmi poſſint exhibere,adeoque malè & contra omnem geometriam, tam illa quam hi, ad exhibendas rationum quantitates aſſumuntur.

Priuſquam caput hoc abſoluam , de duobus mihi Cenſor es interrogandus. Quæro abs te primùm,quid illa ſignificent verba,quæ in tractatu tuo de rationibus,vbi de ſpatiis agis hyperbolicis,ita lego; *quod hic ſuppono vt iam demonſtratum ab aliis,licet poſſem nouâ methodo,quâ magnâ cum facilitate vtor in conicis id breuiter demonſtrare , videri poſſit P. Gregorius in ſuo opere lib.6.* demonſtratum,inquis,ab aliis eſt, ſpatia hyperbolica , ſe mutuo toties continere per additionem , quoties rationes linearum ſpatia includentium,ſe mutuo continent per multiplicationem , idemque à te nouâ methodo quâ magnâ cum facilitate vteris in conicis breuiter poſſe demonſtrari. igitur id iuxta te neque primùm,neque à ſolo P. Gregorio demonſtratum eſt. at à quibus ante vel præter ipſum ? cur auctorem tam præclaræ propoſitionis demonſtratæ non profers? cur ipſe nouâ tuâ quâ in conicis tam facile verſaris methodo non demonſtras? propoſitio certè illa eſt eiuſmodi,quæ earum nullis quas Apollonius poſteris reliquit,aut inuentionis ſubtilitate , aut dignitate cedit : age propoſitionem illam geometricè , aliter quam Auctor fecerit,demonſtra , & egregium te probabis geometram.

Quæro abs te ſecundùm, à quibus,ante vel præter P. Saraſſam obſeruatum & demonſtratum,logarithmos optimè per ſpatia repreſentari hyperbolica ? an eam tu adinuentionem tam leuis eſſe momenti exiſtimas, vt ſi cui ea ante obſeruata aut demonſtrata eſſet, illam publico non fuiſſet commiſſurus,aut ſaltem tanto poſt tempore non committeret ? præſertim in Galliis,vbi tam multa in dies mathematica prodeunt?illam ſubticuiſſet Merſennius,qui Gallorum inuenta,tam edita quam edenda,adeo ſtudioſè enarrat & extollit ? ſi id alius ante vel præter P. Saraſſa demonſtrarit,nomen ede:turpe eſt illam quam ſuis quiſque conatibus meretur laudem detrahere,& alteri perperam adſcribere.

CAPVT

CAPVT DECIMVM.

De Ratione æqualitatis.

INter omnes rationum ſpecies,ea potiſſimum apud Antiquos in pretio fuit,quam æqualitatis vocant:hanc Adraſtus & Eratoſtenes ordinem ducere,primamque eſſe rationum omnium & analogiarum pronuntiarunt:ex hac Nicomachus,Pappus,Theon Smyrnæus,Boetius, medietates omnes educunt, & in illam viciſſim reſoluunt: diſplicuit tamen illa vſque adeo Cenſori, vt de rationum numero eam tantum non eiecerit, ſed ad zero & nihilum vſque redegerit. neque hoc curſim aut ex incidenti,ſed ita collato ſtudio, vt hæc illius nouitas, non minimam tractatus eius, quem de rationibus conſcripſit partem vindicet; & fateatur ipſe præcipuum in ea poſitum eſſe argumentum, quo librum Auctoris de proport. euertere conatus eſt.quod quam egerit infeliciter, oſtendam alibi,quam vero nullis illa opinio nitatur fundamentis, toto hoc monſtrabo capite.

PARS PRIMA.

Quo ſenſu æqualitatis Ratio, cæterarum ſit elementum.

ERatoſtenes apud Theonem Smyrnæum cap.31. rationem æqualitatis reliquarum eſſe elementum ſic oſtendit. *Analogia omnis rationibus conſtat,rationis vero principium eſt æqualitas. illud hinc fit manifeſtum, quod in ſingulis generibus proprium quoddã eſt elementum & principium,in quod cætera reſoluantur,ipſum vero in iſtorũ nullum:oportet igitur hoc eſſe indiuiſibile & indiuiduũ;quod enim diuidi aut ſecari poteſt,collectio dicitur,& non elementũ: ſubſtantia itaque elementa ſecundum ſubſtantiã,indiuiſibilia ſunt:qualitatis ſecundũ qualitatẽ,quantitatis ſecundũ quantitatem.atque omnino vnũquodque eã ratione indiuiduum eſt & vnum,quâ elementum eſt compoſiti cuiuſdã & mixti; numeri quidem quantitatis diſcretæ elementum,eſt vnitas; continuæ punctum ; rationis autem & proportionis;æqualitas.neque enim amplius diuidi poteſt vnitas in quãtitatem diſcretam, aut punctum in continuam, aut æqualitas in plures rationes. componitur autem numerus ex vnitate, linea ex puncto, ratio & analogia ex æqualitate:non tamen ſinguli horum eodem modo;ſed vnitas in ſe ipſa multiplicata, nihil generat,quemadmodum alij numeri; ſemel enim vnum,vnum. compoſitione vero in infinitum augetur; punctum autem neque multiplicatione neque compoſitione,ſed continuo fluxu latum lineam abſoluit,linea ſuperficiem, ſuperficies corpus. atque etiam æqualium ratio compoſitione non creſcit; pluribus enim æqualibus ordine diſpoſitis, ratio ſumma in æqualitate manet, propterea fit,vt punctum non ſit pars lineæ, & æqualitas rationis, vnitas certe pars eſt numeri, ſola ipſa enim compoſita quoddam incrementum ſuſcipit,cauſa vero huius quod dicitur eſt, quia æqualitas interuallo caret, ſicut punctum magnitudine.* Hæc ille.

Diſcurſus hic partim philoſophicus eſt, partim ad geometriam ſpectat. atque duo potiſſimum in eo adſtruuntur: primùm quidem,vnitatem,elementum eſſe quantitatis diſcretæ;punctum continuæ; æqualitatem,rationis & analogiæ. alterum,non eodem modo illorum ſingula ele-

mentum eſſe: & vnitatem quidem partem numeri eſſe, at in ſe multiplicatam nihil generare, compoſitam autem augeri in infinitum. punctum vero neque partem lineæ eſſe, neque multiplicatione aut compoſitione, ſed continuo fluxu lineam abſoluere. æqualium denique rationem, compoſitione non creſcere, neque partem eſſe rationis, quod interuallo careat. verum cuiuſmodi hæc ſint, videamus.

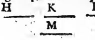
Ac primùm quidem, vnitatem, & numeri partem eſſe, & elementum quantitatis diſcretæ, illam item in ſe multiplicatam nihil generare, compoſitam vero, augeri in infinitum, lubens Eratoſteni concedo; cum ſit veriſſimum, & à pluribus demonſtratum: at de puncto non item: cum enim etiam iuxta ipſum illud elementum dicatur & ſit, in quod cætera reſoluuntur, ipſum vero in iſtorum nullum, linea autem non reſoluatur in punctum, cum ex hoc tanquam ex parte non conſtituatur; (quod Ariſtoteles omneſque philoſophi ad eſſe principij ſeu elementi requirunt) euidens eſt punctum nullâ ratione eſſe aut dici poſſe elementum quantitatis continuæ. quod autem punctum dicatur continuo fluxu latum, lineam abſoluere, nil niſi verba ſunt, conceptum metaphyſicum exprimentia, quo modo nimirum linea omni intelligatur carere latitudine & profunditate.

Porro æqualitatem, rationis & analogiæ elementum eſſe, plane eidem aſſentior: quod ſubdit, *æqualium rationem compoſitione non creſcere, quod pluribus æqualibus ordine diſpoſitis, ratio ſumma in æqualitate maneat*, dupliciter intelligi poteſt: vel enim compoſitionem à multiplicatione diſtinguit, (vti paulo ante de puncto agens, videtur facere) & per illam intelligit veram rationum additionem, & ſic manifeſtè falſum eſt aſſertum, vti infra num. 2. oſtendam; vel Euclidæam intelligit compoſitionem, quæ rationum multiplicatione perficitur, vt oſtendam cap. 15. & ſic veriſſimum eſt aſſumptum: ſed inde nil contra nos ſequitur.

Illud autem quod concludit, *æqualitatem non eſſe partem rationis, quia interuallo caret, ſicut punctum magnitudine*, falſum eſt, illiuſque probatio plane friuola: eſto enim æqualitas interuallo ſeu differentia quantitatis careat, quî vel in ſpeciem inde ſequitur, illam non eſſe partem rationis? deinde licet careat intetuallo quantitatis, non caret interuallis rationum: ſi enim inter æquales duas lineas, quotuis ponantur inæquales, ratio primæ ad vltimam, quæ æqualitatis eſt, componitur ex rationibus omnibus intermediis: quod autem ex rationibus componitur, ipſum neceſſario eſt ratio, nam quod nihil eſt, non poteſt dici aut concipi, componi ex aliquibus quæ ſunt, aut punctum ex quantitatibus.

Denique quia ex allatis Eratoſtenis verbis, nonnulli colligunt, ſimilitudinem aliquam ab illo adſtrui inter punctum & rationem æqualitatis, placet paucis oſtendere nihil hanc cum illo habere commune.

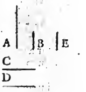
1. Ratio in genere, eſt vera quantitas, vt oſtendi cap. 1. at ratio ſecundum omnes tam antiquos quam recentiores, rectè diuiditur in rationem æqualitatis & inæqualitatis; ratio igitur æqualitatis eſt vera quantitas: ridicula alioquin eſſet illa rationis diuiſio, ſimiliſque ei, quâ quantitatem quis diuidens in continuam & diſcretam, negaret continuam, eſſe quantitatem: atqui punctum nec quantitas eſt, nec illius pars; nil igitur puncto & æqualitatis rationi commune.



2. Sint quatuor lineæ æquales H, K, L, M: quarum tres H, K, L, ſint antecedentes, & M cõſequens: patet rationes H M, K M, L M eſſe æqualitatis:

qualitatis:demonſtratum autem eſt ab Auctore propoſ. 114.l.8. rationes H M, K M, L M ſibi additas,æquari vni rationi, cuius antecedens ſunt tres lineæ H, K, L, conſequens vero M; quæ ratio maior eſt ratione H ad M, vel K ad M, igitur plures rationes æqualitatis ſibi inuicem additæ faciunt quid maius,ratione æqualitatis; & earum ſumma non manet in æqualitate:punctum autem additum puncto, non facit quid maius. igitur rationi æqualitatis & puncto nil eſt commune.

3. Sit A B ratio quæuis inæqualitatis, & C D æqualitatis;fiatque vt D ad C ita B ad E, erunt B & E rectæ æquales, & B E, C D rationes æquales:ſed ratio A B vna cum ratione E B,æqualis eſt rationi ex A & E ad B,per 114. de proport. igitur etiam ratio AB vna cum ratione C D,æquatur rationi ex A & E ad B: at ratio ex A & E ad B,maior eſt ratione A ad B per 8.v. Eucl. ratio igitur æqualitatis C D, addita rationi inæqualitatis A B, hanc immutat, & cum illa facit quid maius. atqui punctum additum lineæ, hanc neque immutat, neque cũ illa facit quidmaius:nil igitur puncto & rationi æqualitatis commune.



4. Ratio æqualitatis eſt ſpecifica ſub genere rationis rationalis, quia inter æquales conſiſtit terminos,adeoque commenſurabiles; omnis autem rationis ſpecificæ rationalis,denominator eſt numerus vel integer, vel fractus in minimis terminis;& quidem rationis maioris inæqualitatis,denominator eſt maior vnitate;minoris inæqualitatis, minor vnitate;igitur rationis æqualitatis denominator eſt ipſa vnitas: vnde ſequitur rationem maioris inæqualitatis eſſe maiorem ratione æqualitatis, & hanc maiorem quãuis ratione minoris inæqualitatis; idque vniuerſaliter etiam in rationibus irrationalibus. atque vnitas cum pars numeri ſit, vt oſtendunt Salignacus, Steuinius &c. vera quantitas eſt, ratio igitur æqualitatis quantitatem habet,adeoque nil commune cum puncto, quod omni caret magnitudine.

Ex quibus concludo,æqualitatis rationem, eo modo analogiæ cæterarumque rationum elementum eſſe, quo vnitas eſt numeri & quantitatis diſcretæ.

PARS SECVNDA.

Reÿcitur doctrina Cenſoris de ratione æqualitatis.

Rationem æqualitatis nullam habere quantitatem, ſed eſſe vel punctum reſpectu lineæ,vel zero aut nihil reſpectu numeri,quatuor potiſſimum argumentis probare conatur Cenſor.

Primum eſt:*videbam, inquit, plures rationes æqualitatis non eſſe maiores vnicâ;rationem æqualitatis cum quauis alia iunctam, eam non immutare; &c. vnde coniiciebam,rationem æqualitatis nullam debere habere quantitatem, ſed eſſe vel punctum reſpectu lineæ, vel zero reſpectu numeri.*

At primam argumenti partem,quæ ait plures rationes æqualitatis non eſſe maiores vnicâ,falſam oſtendi prima parte huius num 2.nam tres rationes æqualitatis ſibi additæ, producunt triplam primæ,quatuor quadruplam &c.

Secun-

Secundam quoque partem falſitatis conuici num.3.ibid. nam ratio æqualitatis alteri inæqualitatis addita,hanc immutat, & cum ea facit quid maius.

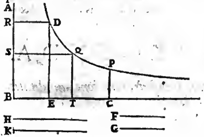
A —— B ——— Concluſionem denique,quã infert, rationem æqualitatis nullam habere quantitatem, ſed eſſe vel punctum vel zero &c. euidenter falſam eſſe oſtendi num. 1. & 4. eo quod æqualitatis ratio æque ac inæqualitatis,ſit vera quantitas, & denominatorem habeat vnitatem : his adde rationem quamcunque inæqualitatis A B, ductam in rationem B A, producere rationem æqualitatis A ad A, vt demonſtrat Auctor oper. li.8. propoſ.76. atqui ratio inæqualitatis A B multiplicata per rationem B A, non eſt nihil,ſiue non producit nihil, ratio igitur æqualitatis non eſt nihil, ſed aliquid, adeoque ratio & quantitas. vanum igitur & nullum eſt totum primum Cenſoris argumentum.

Secundum eſt huiuſmodi:*cum autem inter duos terminos æquales ſeu potius eundem,nulla ſit logarithmorum differentia,ſeu nulla in progreſſione arithmetica differentia, cum nulla quoque in progreſſione geometrica ſit inæqualitas v.g. inter 2 & 2,ratio illa nullam habet magnitudinem.*

Sed hoc æque ac prius nullum eſt : oſtenſum eſt enim cap.3. huius, longè aliud eſſe rationes conſiderare & conferre ſecundum quantitates, aliud ſecundum multiplicationem:oſtenſum inſuper eſt cap.9.rationum ſecundum quantitatem conſideratarum, denominatores nec eſſe, neque eſſe poſſe logarithmos;nullum igitur eſt argumentum à logarithmis petitum.

Tertium ſpatiis innititur hyperbolicis: *cum,inquit, inter duas lineas æquales,ſeu potius vnicam,nullum ſpatium includatur hyperbolicum, patet rationem æqualitatis nullam habere quantitatem.*

Hoc quoque nil ad rem pertinet: oſtendi enim cap.9. huius ſpatia hyperbolica nullo modo poſſe repræſentare rationes ſecundum quantitatem,ſiue illarum eſſe denominatores,nil igitur illa probant, imo nec ad rem ſpectant.

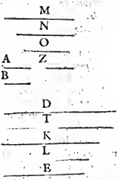


Lubet tamen exercitij cauſa oſtendere, quo modo proportio rationum duarũ æqualitatis, poſſit in hyperbola exhiberi. ſint tam H & K quam F & G lineæ æquales : eruntq̃ H K, F G rationes, quam H F, K G inter ſe æquales. inſuper per 39. de proport.proportio rationis H F ad K G, eadem eſt cum proportione rationis H K ad F G: ſi igitur in hyperbola exhibuero proportionem rationum H F, K G, etiam exhibuero proportionem rationũ H K, F G: ſint D Q P hyperbolæ aſymptoti A B, B C, ſumptâque B R æquali H, ducatur R D paralela C B, & D E paralela R B: rurſum ſumatur S B æqualis F, ductaque S Q paralela C B, ponatur Q T paralela S B, fiatque vt B E ad B T, ita B T ad B C, erigaturque C P paralela A B. patet ex 78.lib. de hyperb. rectas P C, Q T, D E continuè eſſe proportionales:igitur vt D E ad Q T (hoc eſt H ad F)ita Q T ad P C·

ad P C (hoc eſt K ad G) (nam ratio Q T ad P C, eadem eſt cum ratione D E ad Q T, hoc eſt H ad F, hoc eſt K ad G) exhibita igitur eſt in hyperbola proportio rationum H F, K G, adeoque & proportio rationum H K, F G.

Et quoniam iam in hyperbola verſamur, placet vnum è nouis illis Cẽſoris figmentis in lucem adferre: habetur id coroll. 2. Theor. 1. *patet, inquit, inter duas lineas quomodocunque ſumantur, eandem eſſe quantitatem rationis, cum ſpatium inter ipſas concluſum, ſit vnum & idem, ſiue comparetur maior cum minore, ſiue minor cum maiore.* igitur ſecundum illum, ratio lineæ D E ad Q T, eadem eſt cum ratione Q T ad D E: quis quæſo Geometra ferat talia in geometriam irrepere? certè vel vnum hoc corollarium ſufficit, vt totus Cenſoris de rationibus tractatus à tota Geometria proſcribatur. & vero qui etiam ſecundum illius principia, ratio D E ad Q T æqualis eſt rationi Q T ad D E, cum illa ſit maioris inæqualitatis, hæc autem minoris, quas inter ſe conferri poſſe negat? ſi autem velit rationem D E ad Q T, idcirco æqualem eſſe rationi Q T ad D E, quod vtraque eiuſdem tertiæ æquè ſit multiplicata; ſit illa tertia v. g. ratio H ad F, maioris inæqualitatis, cuius triplicata ponatur ratio D E ad Q T: igitur ratio Q T ad D E, minoris inæqualitatis, etiam triplicata eſt rationis H ad F maioris inæqualitatis; rurſum igitur, & quidem ſecundum multiplicationem, comparantur rationes duę contrarij ordinis, quod fieri non poteſt, & ipſe aſſerit eſſe abſurdum. at ratio inquies, Q T ad D E triplicata eſt, rationis F ad H, ratio autem D E ad Q T triplicata rationis H ad F: eſto: quid inde conficitur? an quod ratio D E ad Q T ſit, æqualis rationi Q T ad D E? nihil minus: probandum enim primum eſſet, rationem H ad F æquari rationi F ad H: quod per ſe falſum, & de quo eadem redit quæſtio.

Quartum argumentum in abſurdo conſiſtit: *ſit ratio, inquit, æqualitatis A A. ſi eius quantitatem inquiramus, inueniemus nullam eſſe: ſit enim aliqua quantitas, quæ rationem æqualitatis repreſentet, vt Z. cum igitur quâlibet datâ ratione maioris inæqualitatis, poßit dari minor & minor in infinitum, tandem deuenietur ad quantitatem datâ Z minorem, ac proinde ratio æqualitatis, erit maior ratione maioris inæqualitatis, quod eſt abſurdum.*



Hoc rurſum, vt tria reliqua, infelix eſt. ſit enim quantitas quæcunque Z, cui æqualis ponatur A & huic æqualis B; erit A B rationis, quãtitas Z. ſit autem ratio maioris inæqualitatis D ad E, fiatque vt E ad D, ita B ad M; erit M denominator rationis D E per cap. 6. huius: & quia eſt vt E ad D, minor ad maiorem, ita B ad M, erit M, maior quam B, hoc eſt quam Z. deinde inter D & E ponatur L, maior quidem quam E, minor autem quam D; erit ratio D ad L, minor ratione D ad E per 8. v. Euclid. rationis autem D ad L inueniatur vt prius denominator N. oſtendetur vt ante, N maior quam Z, & minor quam M. rurſum inter D & L ponatur K, maior ipſâ L, minor autem quam D. erit rurſum ratio D K, minor ratione D L; & O denominator rationis D K, oſtendetur maior quam Z, minor vero quam N; atque ita in infinitum procedendo eâ ratione decreſcent denominatores M, N, O, quâ de-

creſcunt rationes maioris inæqualitatis DE, DL, DK. quare quamdiu decreſcentes illæ rationes manent intra ſpeciem maioris inæqualitatis, tam diu illarum denominatores, erunt maiores quantitate Z; & quò vicinius rationes illæ decreſcendo accedent ad rationẽ æqualitatis TD, eò denominatores illarum decreſcendo, magis accedent ad æqualitatem cum quantitate Z. vnde ſi ponatur ratio maioris inæqualitatis D ad E, per infinita, adeoque omnia decrementa defeciſſe, euadet tandem in rationem æqualitatis DT: quo caſu ſi fiat vt T ad D, ita B ad aliud, hoc erit ipſum Z. licet igitur ratio maioris inæqualitatis DE, in infinitum poſſit decreſcere, nunquam illius quantitas ſeu denominator, minor erit quantitate Z, quamdiu intra ſpeciem maioris inæqualitatis ſtabitur; ſed hâc ſemper maior; omni autem decremento exhauſto, ſicut ratio DE, deſinet in rationem æqualitatis DT, æqualem AB, ita illius quantitas ſeu denominator, deſinet in huius denominatorem Z. falſa igitur tota Cenſoris eſt demonſtratio.

PARS TERTIA.

Reijciuntur errores Euthymij Grammatici,

CEnſoris Erroribus, nouos de ſuo, vt ſolet, adiecit Euthymius Grammaticus:

Pag. 109. *caeterum,* inquit, *illarum rationum mediam, quæ ex æqualibus terminis conſtat, quam propterea æqualem veteres appellarunt, nihili rationem vocat Euthymius, quemadmodum O nota nulla ſeu ſiphra in abſolutis numeris nihilum ſignificat.*

Pag. 137. *Ratiò nihili eſt rationum omnium exceſſiuarum & defectiuarum fundamentum & principium, vti ciphra ſeu numerus nullus: ſi rationis nihili antecedentem terminum multiplicem exempli gratia per 4, addo rationi nihili rationem quadruplam: adeo vt ratio ex ratione nihili & addita ratione quadrupla compoſita, ſit ratio quadrupla: ſin conſequentem rationis nihili terminum multiplicem per eundem numerum 4, auſero à nihili ratione, rationem quadruplam, adeo vt ratio ex nihili ratione & ablata ratione quadrupla compoſita, ſit ſubquadrupla.*

Pag. 143. *omnium rationum exceſſiuarum & defectiuarum, minima eſt ratio nihili.*

Pag. 198. vbi propoſ. 2. lib. 8. oper Geom. cenſuit: *ex hac,* inquit, *propoſitione, quod admodum abſurdum eſt, etiam quæuis ratio ad rationem nihili habebit rationem, quam antecedens ad antecedens, quod idem eſt ac ſi numerum rationem habere dicerem ad nihilum ſeu ciphram O.*

Pag. 118. *Porro nihili rationem, rationem quidem eſſe ſtatuimus, ſed nullius quantitatis; quod nihili diſtantia magnitudines illius, antecedens & conſequens, inter ſe diſtent.*

Ingens hic errorum farrago, & ſtupendæ hallucinationes: ac 1. rationem æqualitatis, non eſſe rationem nihili, quemadmodum in numeris eſt nota O, ſed veram eſſe rationem, & ſuam habere quantitatẽ, oſtenſum eſt parte 1 & 2, præſentis capitis. & vero quî ratio æqualitatis, etiam iuxta Euthymium, reſpectu aliarum rationum poteſt eſſe, ſicuti nota O reſpectu numerorum, tum quia iuxta ipſum, ratio æqualitatis omnium exceſ-

ſiuarum

ſiuarum & defectiuarum eſt fundamentum & principium, quod notæ ô in numeris nullo modo competit, tum quia etiam iuxta ipſum ratio æqualitatis, eſt vera ratio, nota vero ô non eſt numerus?

2. Rationem æqualitatis 1 ad 1 additam rationi quadruplæ 4 ad 1, non producere rationem quadruplam, vt vult Grammaticus, ſed verè quintuplam, oſtenſum eſt cap. præſenti parte 1. num. 2. & 3.

Deinde qui poteſt à ratione æqualitatis 1 ad 1, auferri ratio quadrupla? cum ratio æqualitatis iuxta ipſum ſit ratio nihili, & minor ratione exceſſiuâ quadruplâ? idem enim hoc eſt, quod à nihilo ſeu quod nihil eſt, auferre aliquid quod eſt, à nota ô vel zero, auferre numerum 4; vtrumque ineptè.

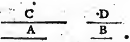
3. Rationem æqualitatis, omnium exceſſiuarum & defectiuarum eſſe minimam, plane falſum eſt: cum ratio æqualitatis ſit quidem minor omni exceſſiuâ, ſed maior omni defectiuâ: adeoque intra vtramque media, vt fatetur ipſe pag. 109. vnde hic ſibi contradicit Grammaticus.

4. Rationem æqualitatis cum alia quauis poſſe comparari, atque id non eſſe idem, quod nihilum ô conferre cum numero, euidens eſt ex eo, quod ratio æqualitatis ſit vera ratio, propriam habens quantitatem & nullo modo ſit ratio nihili, ſeu vt in numeris nota ô ſeu zero, ſed reſpectu aliarum rationum, ſit vt in numeris, vnitas: quæ omnia parte 2. huius cap. oſtenſa ſunt.

Tot igitur grauiſſimos errores hic protulit Grammaticus quot dogmata & ſententias.

CAPVT VNDECIMVM.

De Rationum æqualitate.



PRæcedenti capite, de ratione æqualitatis ſatis ſuperque actum; de rationum æqualitate agendum modo: ac primo quidem, æqualitatis ratio, à rationum æqualitate, diſtinguenda eſt: æqualitatis ratio inter duos conſiſtit terminos æquales. æqualitas rationum, inter duas conſiſtit rationes æquales, ſiue illæ maioris ſint inæqualitatis, ſeu minoris, ſiue illarum termini ſint commenſurabiles, ſiue non. ſic ſi A dupla fuerit B, & C diameter quadrati A, D vero diameter quadrati B, ratio A ad B æqualis eſt rationi C ad D, & vtraque ratio eſt rationalis: ratio item C ad A, æqualis eſt rationi D ad B, & vtraque ratio eſt irrationalis.

PARS PRIMA.

Explicatur definitio 6. lib. 5. Euclidis de æqualitate rationum.

EVclides lib. 5. def. 6. eas rationes æquales eſſe, ſiue eas magnitudines in eadem ratione eſſe pronunciat, *quarum prima ac tertia æquemultiplicia, à ſecunda & quarta æquemultiplicibus, qualiſcunque ea ſit multiplicatio, vtrumque ab vtroque, vel pariter deficiant, vel pariter æqualia ſint, vel pariter excedunt.*

Definitio hæc à multis obſcurior habetur, quod ex illo æquemultipli-

cium

cium pari exceſſu, æqualitate, aut defectu, non ilico appareat rationum æqualitas: vnde à nonnullis plane reiecta, ab aliis alia in locum ſubſtituta, à paucis vt idonea probata. & vt quod res eſt fatear, negare non poſſum, aliquid illi obſcuritatis ineſſe; & illius cum æqualitate connexionem, licet certa & infallibilis ſit, non vſque adeo eſſe euidẽtem, vt nolentem ad aſſenſum cogat.

Quia tamen eadem à tanto Geometra propoſita eſt, à quo qui recedit, Geometriam deſerit, malui explicando aliquid illi lucis affundere, quam hoc reiicere, aut aliam eius loco ſubſtituere. ſemper enim aduerti, recentiores qui antiquam Geometriam corrigere ſatagunt in errores longe turpiſſimos incidere. pro dilucidatione igitur Euclideæ definitionis

Notandum 1. magnitudinem vnam alterius dici multiplicem, cum minor metitur maiorem, ſeu cum minor à maiore aliquoties v.g. bis, ter, &c præciſè continetur. illas vero magnitudines commenſurabiles dici, quas eadem metitur menſura.

Notandum 2. dum quatuor ſunt magnitudines, quarum tertia æquemultiplex dicitur quartæ, quam prima ſit ſecundæ: æquemultiplicitatem illam, duplicem eſſe, ſeu duobus modis poſſe intelligi. 1. prout æquemultiplicitas illa dicit commenſurabilitatem ſeu multiplicitatẽ antecedentium ad conſequentia, & ſic tertia æquemultiplex dicetur quartæ, quã prima ſit ſecundæ, cum tertia toties præciſe continet quartam aut, partẽ huius aliquotam, quoties prima præciſè continet ſecundam, aut partem eius aliquotam ſimilem priori; adeoque ſupponit terminos eſſe commenſurabiles. 2. & aliter æquemultiplicitas intelligi poteſt, prout abſtrahit à commenſurabilitate aut incommenſurabilitate terminorũ, & ſic non ſupponit aut infert multiplicitatem antecedentium reſpectu conſequentium, ſed parem exceſſum, aut defectũ, aut æqualitatẽ aliarum magnitudinũ, quæ antecedentiũ ſunt pari numero multiplices, ab aliis magnitudinibus, quæ conſequentium pari numero multiplices ſunt. ſic tertiam eſſe æquemultiplicem quartæ, quam prima ſit ſecundæ, non dicit tertiã tam eſſe multiplicẽ quartę, quã prima ſit ſecundæ, aut quartam toties præciſe contineri à tertia, quoties ſecunda continetur à prima, aut tertiã tã eſſe cõmenſurabilem quartæ, quam prima ſit ſecundæ; ſed dicit primæ ac tertiæ æquali numero multiplices, à ſecundæ & quartæ æquali numero multiplicibus, vtraſque ab vtriſque vel pariter deficere, vel pariter æquales eſſe, vel pariter excedere.

Notandum 3. dum definitio alicuius rei petitur, nil aliud peti quam enuntiationem, quæ ita primum ac genuinum rei definitæ conceptum ingeneret, vt definitio & res definita, ſint ſynonima & conuertibilia.

His prænotatis: definitionem æqualitatis rationum, ex rei natura, & vt puto ex ipsâ Euclidis mente ſic formo.

Illa rationes æquales ſunt, quæ inter terminos conſiſtunt æquemultiplices. Terminos autem illos æquemultiplices voco, quorum primi ac tertij æquali numero multiplices, adeoque commenſurabiles, à ſecundi & quarti æquali numero multiplicibus & commenſurabilibus, vtrique ab vtriſque, vel pariter deficiunt, vel pariter ſunt æquales, vel pariter excedant.

Definitionem hanc bonam & genuinam eſſe, patet 1. ex eo quod talem rei definitę conceptum intelligenti indet, quo prior dari non poteſt: quemcumque enim conceptũ de æqualitate rationũ, prout rationales & irrationales complectitur formaueris, deprehendes ilico, proprietatem aliquam, naturâ poſteriorem inuolui. patet 2. ex eo quod definitio & res

definita,

definita, plane ſint ſynonima & conuertibilia: nam duarum rationum terminos eſſe æquemultiplices, & rationes eſſe æquales, ita res vna eademque ſunt, vt neutra prior alterâ ſit, aut concipi abſque alia poſſit.

Ex his collige 1. obſcuritatem Euclideæ definitionis prout verba illius ſonant, inde meo iudicio ortam, quod definitionis explicationem potius, quam ipſam definitionem contineant, aut ſimul cum hac inuoluant.

Collige 2. male Euclidem à recentiori nonnullo argui, quaſi proprietatem pro definitione attulerit: falſum id enim eſſe ex definitione iam explicata, manifeſtum eſt. deinde vt definitio illa per proprietatem facta eſſet, an idcirco vitioſa aut non legitima? ridiculum: innumeræ in geometria ſunt, quæ non fiunt per genus & differentiam, ſed vel per proprietatem, vel deſcriptionem, en ex multis paucas. lib. 1. circulus definitur, figura plana ſub vna linea comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum quæ intra ſunt, omnes rectæ ductæ, inter ſe æquales ſunt. lib. 3. ſimilia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales. l. 5. cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam habere rationem dicitur eius, quam prima habet ad ſecundam. lib. 6. ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem. lib. 11. ſphæra eſt, quando ſemicirculus manente diametro circumductus, in ſeipſum reuoluitur. conus eſt, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſeipſum rurſum reuoluitur. pari ratione definitur cylindrus, & ab Archimede Conoides parabolicum & hyperbolicum, ſphæroides, ſpiralis &c. quas definitiones ſi per genus & differentiam factas aſſeris, eodem iure & ſextam lib. 5. per genus & differentiam factam aſſero.

Collige 3. male rurſum Euclidem ab eodem recentiore argui, quod connexionem multiplicium cum rationum æqualitate non demonſtrarit: quamuis enim id facile potuiſſet geometra egregius, cum ex ipſo id alij deinde fecerint, nullo tamen modo demonſtrare debuit, cum ad definitionem non demonſtratio, ſed ſola rei veritas requiratur. nullus enim vnquam teſte Proclo, Geometra quæſiuit definitiones aut principia demonſtrari; hoc ipſo enim & definitiones & principia eſſe deſinunt, quo demonſtrantur.

PARS SECVNDA.

Expenditur indicium æqualitatis rationum à recentiore quodam aſſignatum.

DEfinitionem Euclidis, tanquam indicium æqualitatis rationum, nimis remotum & implexum, vbi reiecit recentior ille, aliud eius loco clariſſimum vt ait, & magis primum ac immediatum ſubſtituit: illud autem eſt huiuſmodi.

Rationes maioris inæqualitatis, æquales ſunt, quando & conſequentes ipſæ, & conſequentium ſimiles partes aliquotæ quæcunque, in antecedentibus æquali ſemper numero continentur. porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ. ex quo rationum irrationalium æqua-

 litas

litas & inæqualitas continuo eluceſcit , cum ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles , per ablata conſequentibus commenſurabilia & proportionalia exhauriantur.

In hoc æqualitatis indicio nonnulla aduerto. ac

1. Quidem illud, quantum ad rationes rationales pertinet (quæ tum nimirum ſunt æquales, *dum conſequentes ipſa & conſequentium ſimiles partes aliquota in antecedentibus æquali ſemper numero continentur*) nil noui continere ac diuerſum ab eo, quod Clauius ſcribit ad defin. 8. lib 5. & reiicit; verba Clauij ſunt: *ſi Euclides de rationibus dumtaxat rationalibus diſputationem inſtituiſſet , potuiſſet quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit : nimirum magnitudines proportionales ſunt, cum prima ſecunda , & tertia quarta æquemultiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, vel certè vt nos ad eam definitionem addidimus , cum prima ſecundam & tertia quartam æqualiter continet eandemque inſuper illius partem , vel eaſdem partes. potuiſſet inquam Euclides ita definire ſi de ſolis rationalibus ageret. quoniam verò non ſolum proportiones rationales, ſed irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor proportionales definire.* &c.

Aduerto 2. in eodem indicio, prout irrationales & rationales complectitur, committi circulum. quæritur enim quid ſit quatuor magnitudines eſſe *Proportionales*, aut quo indicio id ſciri poſſit. reſpondetur, tum *Proportionales* eſſe dum conſequentes ipſæ & conſequentium *Similes partes aliquotæ* in antecedentibus æquali numero continentur, hoc eſt, ablatę quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ, quia ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles, per ablata conſequentibus commenſurabilia & *Proportionalia* exhauriuntur. in his inquam circulus committitur, 1. quia partes aliquotas eſſe ſimiles, idem eſt ac proportionales eſſe, de quibus quid ſint quæritur. 2. quia iubetur fieri exhauſtio per ablata conſequentibus *Proportionalia*, de quibus eſt quæſtio, quid ſint.

Aduerto 3. in eodem indicio, non euitari (quod tamen maxime intendit) æquemultiplicia. nam conſequentes ipſas & conſequentium ſimiles partes aliquotas æquali numero in antecedentibus contineri, ſeu quantum poſſunt auferri &c. nil aliud ſignificat, quam antecedentes eſſe æquemultiplices conſequentium, aut partium aliquotarum ſimilium. & cum præterea fieri debeat exhauſtio , per ſe obſcuriſſima & quæ primum ab Euclide lib. 10. proponitur , manifeſtum eſt indicium à recentiore illo allatum , vt omni alio vitio careret , Euclidæo non modo non eſſe clarius & immediatius, ſed multo obſcurius ac remotius.

PARS TERTIA.

Exhibentur aliquot proprietates æqualitatis Rationum.

DEclaratâ naturâ & eſſentiâ æqualitatis rationum , ſupereſt vt proprietates & affectiones nonnullas exhibeamus , vt quibus natura æqualitatis minus perſpecta eſt , per proprietates eiuſdem magis innoteſcat.

1. Proprietas ab Euclide proponitur his verbis lib. 6. propoſ. 16. *Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectāgulum,*

gulum, æquale eſt ei quod ſub mediis comprehenditur rectangulo.

2. Ab eodem proponitur ibidem propoſ.17. *ſi tres lineæ fuerint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur quadrato.*

Vtraque hæc aſſertio præclara eſt, & magnum in tota geometria habet vſum, vti & reliquæ, quas Eucl. l.5. permutãdo, inuertendo, diuidendo, componendo & ex æquali demonſtrat, quas ſtudio hîc omitto, quia propriè ſpectant ad modos argumentandi ex rationibus æqualibus.

3. Ab eodem proponitur lib.5. propoſ. 25. *ſi quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima, reliquis duabus maiores erunt.*

4. Ibidem à Commandino additur: *ſi tres magnitudines fuerint proportionales, maxima & minima, maiores erunt quam dupla reliqua.*

Nota: 1. & 2. proprietatem in hoc differre à 3. & 4. quod in duabus prioribus, agatur de multiplicatione ſeu ductu terminorum proportionalium in ſe inuicem; in poſterioribus autem, de eorundem additione.

5. Ab Auctore oper. Geom. proponitur lib. 8. propoſ. 108. *ſi quatuor magnitudines fuerint proportionales: quadratum primæ, & rectangulum ſub ſecunda & tertia, & quadratum quartæ, in continua ſunt analogia.*

A C
B D

6. Ibid. propoſ. 83. *Si ratio A ad B ſit æqualis rationi C ad D, ratio A ad B ducta in rationem D ad C, producet rationem æqualitatis.*

A B C

7. Ibidem propoſ. 127. *ſint A, B, C, in continua analogia: ratio A B ducta in B C, eſt ad rationem C B ductam in B A, vt A ad C, ad C ad A.* ſic enim corrigendus eſt error typographicus, qui in propoſitionem illam irrepſit.

A B C
Z

8. Ibid. propoſ. 138. *ſint A B C in continua analogia, & quæuis ponatur Z. rationes A Z, B Z, C Z, item Z C, Z B, Z A in continua erunt analogia.*

Plures ibidem vide: propoſ. 139. 140. 146. 154. &c. item lib. 2. de progreſſion.

CAPVT DVODECIMVM.

De mutuo Rationum exceſſu & defectu ſecundum quantitatem.

Oſtenſum eſt cap. 1. huius, rationes veras eſſe quantitates: oſtenſum inſuper cap. 3. aliud eſſe comparare rationes inter ſe ſecundum quantitatem, aliud ſecundum multiplicationem: quæritur modo, cum vna ratio dicatur alterâ maior, minorúe, aut illi æqualis, vnde deſumi debeat illa maioritas aut minoritas rationum: contendunt aliqui, rationem eam maiorem debere dici alterâ, quæ reſpectu eiuſdem tertiæ, magis eſt multiplicata, quidquid ſit de illarum denominatoribus ſiue quantitatibus. pro quo ſit

PARS

PARS PRIMA.

An maioritas vnius rationis ſuper alterâ, deſumenda ſit pænes multiplicationem.

CErtum eſt ex antiquis Auctoribus omnino nullum pro affirmatiua propoſitæ quæſtionis ſtare: tum quia Euclides, aliique, maioritatem vnius rationis ſuper alia, deſumunt pænes æquimultiplices, quæ nihil minus quam multiplicationem inuoluunt, tum quia ex hac opinione ea neceſſario conſequuntur, quæ minimè cum illorum doctrina conſiſtunt, vt mox oſtendam.

1. Pappus Alexandrinus, Theon, Nicomachus, Eratoſtenes, aliique antiquiores, rationes omnes inæqualitatis & analogias deducunt ac formãt ex ratione æqualitatis, per ſolam additionem terminorum (nuſquam mentionem vllam facientes de multiplicatione) & in illam viciſſim reſoluunt; igitur ex illis nemo maioritatem aut minoritatem deſumpſit, pænes minorem aut maiorem multiplicationem.

2. Sint quatuor continuè proportionales A, B, C, D, minoris inæqualitatis. A B C D demonſtrat Euclides: 8. v. rationem A ad C, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe ratione A ad D, eiuſdem ad maiorem: & tamen ratio A ad D, magis eſt multiplicata eiuſdem rationis A B, quam ſit ratio A ad C: maioritas igitur rationis vnius ſuper alia, non deſumitur pænes maiorem multiplicationem.

3. Omnis ratio minoris inæqualitatis, multiplicata eſt cuiuſuis alterius rationis minoris inæqualitatis, quæ priori maior eſt, vt demonſtrabo cap. 15 huius. A B C D & patet in quatuor continuè proportionalibus minoris inæqualitatis A, B, C, D: nam ratio A ad D minor eſt ratione A ad B, & tamen illa, huius eſt triplicata: rurſum igitur maioritas rationis peti non poteſt ex maiori multiplicatione.

4. Datæ ſint duæ rationes contrarij ordinis, vna maioris, altera minoris inæqualitatis: exhiberi poſſunt illarum denominatores, adeoque vtra, alterâ ſecundum quantitatem ſit maior, minorúe, vt oſtendi cap. 7. & tamen illæ comparari inter ſe non poſſunt ſecundum multiplicationem, neque exhiberi, vtrum, & quoties vna alterius ſit multiplicata, (vt demonſtrabo cap. 15.) neque cum eadem tertia quoad multiplicationem conferri vt oſtendi parte 2. cap. in hyperbola ad coroll. Cenſoris: maioritas igitur & minoritas rationum aliunde petitur, quam ex multiplicatione.

Denique vnicum contrariæ opinionis fundamentum eſt, quod rationum natura, ita à multiplicatione dependeat, vt illæ inter ſe conferri non poſſint, quam ſecundum multiplicationem, adeoque illarum quantitates ſint vel logarithmi vel ſpatia hyperbolica: quæ duo cum euidenter falſa eſſe oſtenderim cap. 9. nouitatem illam quoque corruere neceſſe eſt.

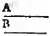
PARS

PARS SECVNDA.

Vnde deſumi debeat maioritas rationum ſecundum quantitatem.

EVclides lib.5. defin.8. maioritatem rationis, deſumit ex æque multiplicibus: hoc modo; *cum vero æquemultiplicium, multiplex prima magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ, tum prima ad ſecundam maiorem habere rationem dicitur, quam tertia ad quartam*. quam definitionem nôn ad libitum poſitam, vti aſſerit Cenſor, ſed optimis fultam eſſe rationibus, rectè ibidem oſtendit Clauius, definitionemque quî intelligi debeat fusè explicat.

Verum quia illa æquemultiplicium methodus obſcurior, & multis intricata viſa eſt, hâc relictâ, videamus quibus poſitis vel ablatis, rationes iuxta antiquos creſcant vel decreſcant; atque inde certi aliquid ac definiti de rationum incremento & decremento ſtatuamus.



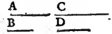
1. Sit ratio quæuis æqualitatis A B, ſi inuariato conſequente B, augeatur antecedens A, in duplum, triplum, quadruplum &c. orietur ratio multiplex, dupla, tripla, quadrupla &c. atque econtra decreſcet ratio B ad A, fietque ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla &c. rurſum ſi antecedente A inuariato, decreſcat conſequens B dimidiâ ſui parte, exſurget A B ratio dupla, ſi tribus quartis quadrupla, ſi quinque ſextis ſextupla &c.



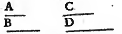
2. Sit A B ratio maioris inæqualitatis: ſi vel augeatur antecedens A, vel minuatur conſequens B, reliquis inuariatis creſcit ratio A ad B & decreſcit ratio B ad A: ſi vero augeatur conſequens B, vel minuatur antecedens A, reliquis manentibus, decreſcit ratio A ad B, & creſcit ratio B ad A.



3. Sit iam A B ratio minoris inæqualitatis: ſi vel augeatur antecedens A vel minuatur conſequens B reliquis inuariatis, creſcit ratio A ad B & decreſcit ratio B ad A: ſi autem vel augeatur conſequens B, vel minuatur antecedens A, reliquis manentibus iiſdem, decreſcit ratio A ad B, & creſcit ratio B ad A.



4. Sint duæ rationes maioris inæqualitatis A B, C D: ſi quo exceſſu A ſuperat B, eo proportionaliter C ſuperet D: æquales erunt rationes A B, C D.



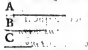
5. Sint duæ rationes minoris inæqualitatis A B, C D: ſi quo defectu A deficit à B, eodem proportionaliter C deficiat à D. æquales erunt rationes A B. C D. Atque hæc omnia demonſtrantur facilè ex 8.v. Euclidis.

A 14
B6 C8
D

6. Sit quæuis quantitas A, cuius partes ſint B & C, ponaturque quantitas quæcunque D: ratio A ad D æquatur duabus rationibus B D, C D per 114 de proport. quia vero rationes duæ B D, C D ſimul ſumptæ, alterutrâ ſunt maiores, ſequitur rationem A ad D maioris ad eandem, maiorem eſſe

ratione B ad D, vel C ad D minoris ad eandem: quæ pars prima eſt octauæ v. Euclidis.

7. Iiſdem poſitis: patet rationem eiuſdem D ad maiorem A, minorem eſſe ratione D ad B vel C, minores A. quanto enim ratio A ad D maior eſt, tanto minor eſt ratio D ad A; quo enim maior eſt ratio A ad D, eo magis excedit rationem æqualitatis, & ratio D ad A magis deficit à ratione æqualitatis, adeoque minor eſt.

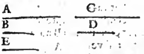


Nam ſicut duarum linearum B, C, deficientium à maiori A, illa maior eſt quæ minus deficit à maiori A, illa vero minor quæ magis ab eadem deficit: ita rationum minoris inæqualitatis, illa maior eſt quæ minus deficit à ratione æqualitatis, & illa minor, quæ magis ab eadem deficit: ratio enim æqualitatis maior eſt quâuis ratione minoris inæqualitatis.

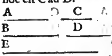
Hinc patet rationũ maioris inæqualitatis, maioritatem vel minoritatẽ deſumi pænes maiorem, vel minorẽ exceſſum ſuper ratione æqualitatis, exceſſum vero illũ mutari, mutatâ habitudine ſeu reſpectu antecedentis ad conſequens: ſimiliter rationum minoris inæqualitatis maioritatem & minoritatem deſumi pænes maiorem vel minorem defectum à ratione æqualitatis, defectumque illum variari, variatâ habitudine antecedentis ad conſequens.

PARS TERTIA

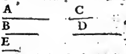
Regulæ aliquot ex quibus dignoſci poßit, vtra ex propoſitis rationibus, ſit maior altera, minorue.



REgula 1. *Sint duæ quæuis rationes maioris inæqualitatis: AB, CD: ſi antecedens A, maiori exceſſu proportionaliter ſuum excedat conſequent B, quam C excedat D, erit AB ratio maior ratione CD.* fiat enim vt C ad D ita E ad B, erit EB ratio æqualis rationi CD: quia vero ponitur A magis excedere ipſum B, quam C excedat D, etiam A magis excedet B, quam E excedat B, igitur A maior eſt quam E, & per 8.v. ratio A ad B, maior ratione E ad B, hoc eſt C ad D.



Regula 2. *Sint duæ quæuis rationes minoris inæqualitatis AB, CD: ſi antecedens A, minori defectu proportionaliter deficiat à ſuo conſequente B, quam C deficit à D, erit AB ratio maior ratione CD.* fiat enim vt C ad D, ita A ad E, erit AE ratio æqualis rationi CD: quia vero ponitur A minus proportionaliter deficere à B, quam C à D, etiam A minus deficiet à B, quam ab E, igitur B minor eſt quam E, & AB ratio maior ratione AE, hoc eſt CD per 8.v.



Regula 3. *Sint duæ quæuis rationes, & AB quidem maioris inæqualitatis, CD vero minoris: ſemper AB ratio maior eſt ratione CD:* fiat enim vt D ad C ita B ad E; erit CD ratio æqualis rationi EB, & AB ratio ad rationem EB, vt eadem ratio AB ad rationem CD: quia vero CD ratio ponitur minoris inæqualitatis, erit

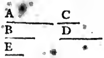
& EB

& EB ratio minoris inæqualitatis, adeoque E minor quam B; ſed B minor ponitur quam A, igitur E multo minor eſt quam A: atque vt A ad E, ita ratio AB ad rationem EB, per 2. lib. 8. oper. Geom. igitur vt A ad E ita ratio AB ad rationem CD: igitur illa, multo maior eſt hâc.

Regula 4. Sint quæuis duæ rationes rationales, & prima quidem ſeſquialtera, ſecunda ſuperbipartiens tertias: multiplica 3, antecedens rationis ſeſquialteræ, in 3 conſequens rationis ſuperbipartientis tertias, & productum erit 9. rurſum multiplica 5 alterius rationis antecedens, per 2 conſequens rationis primæ, & productum erit 10. ratioque ſeſquialtera 3 ad 2, ad rationem 5 ad 3, vt 9 ad 10.

$$\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$$
9 10.

Regula 5. & vniuerſaliſſima. ſint duæ rationes quæcunque AB, CD; ſiue rationales ſiue irrationales, ſiue maioris inæqualitatis ſiue minoris: fiatque vt D ad C ita B ad E; erit AB ratio ad rationem CD, vt A ad E per. 13. lib. de proport.



PARS QVARTA.

Reijcitur doctrina Cenſoris de maioritate rationum.

Contra certam hanc antiquorum doctrinam, tria adfert argumenta Cenſor, quorum nullum, vel ad ſpeciem eſt probabile, vt iam videbimus.

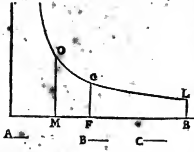
Primum eſt: *quod ſi quæpiam magnitudo, comparetur ad duas maiores, ad maximam ipſarum, maiorem habet rationem, quam ad minorem: tum quia inter ipſas maior eſt inæqualitas, ac proinde maior ratio, tum quia maxima duarum maiorum, ad tertiam, maior eſt ratio, quam minoris: & quamuis hæc cum definitione Euclidis non conueniant, de iis propterea dubitandum non eſt, cum in vera rationum natura ſint fundata, definitio vero Euclidis ſit poſita ad libitum.*

Sint tres quantitates A, B, C; quarum A minima, C vero maxima. aſſerit Cenſor, rationem A ad C, maiorem eſſe ratione A ad B; *tum quia inter A & C maior eſt inæqualitas, tum quia ratio C ad A, maior eſt ratione B ad A.* ſed vtraque hæc ratio oppoſitum rectè probat. quia enim maior eſt inæqualitas inter A & C, quam inter A & B, ideo ratio A ad C magis deficit à ratione æqualitatis, quam ratio A ad B, adeoque ratio AC minor eſt ratione AB: cum enim ratio maioris inæqualitatis maior ſit ratione æqualitatis, & hæc maior quauis ratione minoris inæqualitatis, vt ante demonſtratum eſt, inter rationes minoris inæqualitatis, ea minor eſt, quæ magis deficit à ratione æqualitatis, quemadmodum inter rationes maioris inæqualitatis, illa maior eſt, quæ magis excedit rationem æqualitatis: tanto autem magis ratio A ad C deficit à ratione æqualitatis, quanto ratio C ad A eandem magis excedit: quanto igitur maior eſt inæqualitas inter A & C, quam inter A & B, quantoque CA ratio maior eſt ratione BA, tanto ratio A ad C minor eſt ratione A ad B.

B4
A2
C12

Deinde, quæro ab Cenſore vnde rationum quantitates innoteſcant? haud dubiè ex mutua denominatorum habitudine, ita ipſe cenſet defin. 6. atqui rationis AB denominator eſt C, & rationis AC denominator

B, vt demonſtraui ca. 6. igitur A B ratio eſt ad rationem A C, vt C ad B; at C maior ponitur quã B, igitur A B ratio maior eſt ratione A C. nullum igitur eſt argumẽtum Cenſoris primum, & doctrina illius non tantum in vera rationum natura fundata non eſt, ſed illam penitus euertit.



Secundum ex hyperbola petitur. *Sit A minor B, & hæc minor C. fiatque in hyperbola vt A ad B, ita L B ad F G, & vt A ad C, ita L B ad O M. erit ſpatium L B M O quantitas rationis A ad C, & ſpatium L B F G quantitas rationis A ad B: at ſpatium L B M O maius eſt ſpatio L B F G, ergo A C ratio maior ratione A ad B.*

Argumentum hoc peccat primum, quod ſpatia hyperbolica L B M O, L B F G faciat quantitates rationum A C, A B, ſiue L B ad M O, & L B ad F G, id enim falſum eſſe oſtendi cap. 9. huius, cum ſpatia hyperbolica nil aliud repræſentent, quam multiplicationem rationum, quæ ſunt inter lineas, ſpatia illa includentes. rurſum peccat, quod ex eo quod ſpatium L B M O, maius ſit ſpatio L B F G, inferat rationem A C, maiorem eſſe ratione A B; id enim planè falſum eſt: non enim A C ratio eſt ad rationem A B, vt ſpatium L B M O ad ſpatium L B F G, ſed quã multiplex eſt ſpatium L B M O, ſpatij L B F G, toties A C ratio multiplicata eſt rationis A B. porro maioritatem rationis vnius ſuper alia, non deſumi pænes multiplicationem, oſtendi parte primâ huius.

A	B	C	D
12.	3.	12	4
A	B	C	D
17	5	12	6

Tertium argumentum ex abſurdo ducitur: *habeat A ad B maiorem rationem quam C ad D, ſitque A æqualis C. iuxta ipſos* (id eſt Euclideos) *ratio A ad C, maior eſt ratione B ad D, id eſt zero erit maior aliquo numero, & nihilum maius aliquâ quantitate, punctum lineâ: quo quid abſurdius excogitari poteſt? ſit iam A maior C, ſed B minor D; erit poſt permutationem, prima ratio maioris inæqualitatis, & ſecunda minoris, ergo quantitates contrarij ordinis, & quaſi diuerſi generis, quoad magnitudinem inter ſe comparabuntur: quod non minus abſurdum.*

At quis miretur, ex hypotheſi abſurdiſſima, ſequi abſurdum? ſupponit ille, rationem æqualitatis, eſſe zero reſpectu numeri, nihilum reſpectu quantitatis, punctum reſpectu lineæ; & ex eo præclarè infert, zero iuxta Euclidem eſſe maius aliquo numero, nihilum quantitate &c. quâ ratiocinatione quid ineptius excogitari poteſt? porro hypotheſim illam falſam eſſe, oſtendi cap. 10. huius. de rationibus contrarij ordinis quod addit, perridiculum eſt vt mox oſtendam.

PARS

PARS QVINTA.

Reiiciuntur errores Euthymij Grammatici.

NOn tot monſtra vno ſæculo producit Africa, quot enormes & monſtroſos in hac materia errores, protulit Euthymius Grammaticus: paucos hic, ne Lectori, tot naturæ abortiua proferendo, nauſeam pariam, caſtigabo.

1. Pag 76. *Differentia rationum 9 ad 6, 8 ad 6, eſt ratio 9 ad 8; ſimiliter differentia rationum 4 ad 2, 3 ad 2, eſt ratio 4 ad 3, & ſic in omnibus.*

2. Pag. 121. *Ratio dupla (2 ad 1) eſſentiâ ſuâ æqualis eſt ſubduplæ (1 ad 2) quia diſtantia magnitudinum vtriuſque rationis, eſt æqualis.*

Pag. 125. *Rationis Geometricæ natura & eſſentia, in magnitudinum quæ rationem conſtituunt, inter ſe diſtantia (quod in arithmetica ratione omnes admittunt) generaliter eſt conſtituta:*

Pag. 129. *Verum igitur eſt, 7 ad 4. maiorem habere rationem, quam 5 ad 4: at falſum. 4 ad 5, maiorem habere rationem, quam 4 ad 7.*

Falſum item eſt, 4 ad 6, maiorem habere rationem, quam 3 ad 6; verum autem, 6 ad 3, maiorem habere rationem, quam 6 ad 4.

Falſum rurſus eſt, 4 ad 3, maiorem habere rationem, quam 2 ad 3; & illud: 3 ad 2, maiorem habere rationem, quam 3 ad 4: quia diuerſi generis rationes, exceſſiua & defectiua, inter ſe comparari nequeant.

3. Pag. 146. *Diuerſi generis rationes exceſſiua & defectiua; quatenus vna maior aut minor eſt alterâ, comparari inter ſe non poſſunt: quod comparatio eiuſdem generis nomina requirat: quippe eodem circo eandem verſus metam decertant: & diuites cum diuitibus comparantur, debitores cum debitoribus: quare Lucius qui tria millia in bonis habet, comparari nequit cum Titio, qui quatuor millia debet: &c. exceſſus igitur & defectus inter ſe ſecundum quantitatem, hoc eſt diſtantiam à nihilo, non comparantur.*

4. Pag. 178. *Rationem 6 ad 2, non eſſe duplam rationis 3 ad 2, item rationem 8 ad 3, non eſſe duplam rationis 4 ad 3, & ſic deinceps: duplici demonſtratione oſtẽdam. 1. hoc aſſumpto lemmate, duplorum, duplos eſſe exceſſus, triplorum triplos, ſeſquialterorum ſeſquialteros: quippe vti 4 & 2, binario inter ſe differunt, ita illorum dupli 8 & 4 quaternario; tripli 12 & 6 ſenario &c. ſic rationes 9 ad 1 & 4 ad 1, inter ſe differunt ratione 9 ad 4: illarum duplæ 18 ad 1, & 16 ad 1, ratione bis dupli ſuper quartâ 81 ad 16: Triplæ 729 ad 1, & 64 ad 1, ratione 729 ad 64: quæ eſt rationis 9 ad 4 tripla: ſeſquialtera 27 ad 1, & 8 ad 1, ratione 27 ad 8; quæ rationis 9 ad 4 eſt ſeſquialtera: cum itaque ſimplarum rationum 3 ad 2, 4 ad 3 differentialis ratio ſit 9 ad 8, duplarum 6 ad 2, 8 ad 3, ſeu 18 ad 16, 16 ad 6, differentialis ratio. erit ſimpla differentialis rationis dupla, nempe 81 ad 64; atqui eadem eſt quæ ſimplarum ſcil. 18 ad 16, ſeu 9 ad 8: quod eſt abſurdum: ergo rationum 3 ad 2 & 4 ad 3, non ſunt duplæ rationes 6 ad 2, & 8 ad 3.*

2. Demonſtratio eſt huiuſmodi: *aſſumpto hoc lemmate. Arithmetica progreſſionis numeri, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe inuicem ſuperare, quo primus ſuperat nihilum: quippe eodem exceſſu quo vnitas ſuperat nihilum, binarius ſuperat vnitatem, ternarius binarium &c. cum itaq. in hac rationũ progreſſione 2 ad 2. 3 ad 2. 6 ad 2. 9 ad 2. 12 ad 2. 15 ad 2, ratio 3 ad 2 ſimpla ſit & vnitatis loco ponatur, cuius dupla eſt 6 ad 2, tripla 9 ad 2, quadrupla 12 ad 2. quintupla 15 ad 2, continebit dupla 6 ad 2, bis ſimplam 3 ad 2: atque*

duæ ſimplæ 6 ad 4 additæ, efficiunt rationem 9 ad 4, quæ minor eſt ratione 12 ad 4, quare dupla ratio 12 ad 4, maiore exceſſu ſuperat ſimplam 6 ad 4: quam ſimpla ſuperat rationem nihili 4 ad 4: quod eſt contra adſumptum lemma, non ergo ratio 12 ad 4 dupla eſt rationis 6 ad 4.

3. *Demonſtratio: quoniam ratio 9 ad 4, eâdem ratione 9 ad 6, ſuperat rationem 6 ad 4, quâ ratio 6 ad 4 ſuperat rationem nihili 4 ad 4: ratio autem 12 ad 4, ſuperat rationem 6 ad 4, ratione 12 ad 6, quæ maior eſt ratione 9 ad 4; idcirco ratio 12 ad 4, maior eſt quam vt rationis 6 ad 4 tantum ſit dupla; ſed & eadem ratio 12 ad 4, rationis 6 ad 4 ponebatur dupla, ergo eadem ratio 12 ad 4, & dupla eſt rationis 6 ad 4, & maior quam dupla: quod eſt abſurdum.*

5. Pag. 188. *Grandi igitur paralogiſmo lapſus eſt Gregorius à S. Vincentio, qui rationum proportionem in huiuſmodi numeris conſtituit, vt ratio 8 ad 2 ad rationem 4 ad 2, ita ratio 6 ad 2 ad rationem 3 ad 2: neque enim quod ſuperius demonſtraui, quemadmodum rationis 4 ad 2, dupla eſt ratio 8 ad 2, ſic rationis 3 ad 2, dupla exiſtit ratio 6 ad 2; ſed longe hæc maior eſt quam illius dupla.*

En lector Geometra paucas ex infinitis, monſtroſas Grammatici hallucinationes: quæ quales ſint, modo videamus.

1. Non diſtinguit Grammaticus interualla harmonica, & differentias arithmeticas, à rationibus Geometricis, ſed (quod in triduano Geometra vix ferendum) confundit omnia: & cum alibi dixerit, rationes arithmeticas & harmonicas, propriè non eſſe rationes, ſed medietates (quod eſt veriſſimum) mox ſui immemor, pag. 125, vult eſſentiam rationis Geometricæ conſiſtere in interuallis & differentiis, ſicut eſſentiæ medietatum Harmonicarum & Arithmeticarum, conſiſtunt in interuallis & differentiis; hinc tabulas commatum, harmonicis medietatibus dimetiendis aptas, ad rationum Geometricarum quantitates menſurandas, contra omnem vſum, & rationum naturam, ineptiſſimè adhibet.

Porro in quo ratio ab interuallo & differentia diſtinguatur, oſtendi cap. I. huius ſub finem: quod ſi rectè perceperit Grammaticus, ſpes aliqua affulget, vt in Geometriæ Tyronem aliquando euadat: quare paucis in gratiam Grammatici ea repetam.

Primum igitur eſto; Ratio ab interuallo & differentia diſtinguitur: namque ſecundum omnes tam antiquos quam recentiores, ab vnitate ad binarium, & à binario ad vnitatem, vnum idemque interuallum eſt, nimirum vnitas, tamen ratio vnitatis ad binarium, & binarij ad vnitatem, non eſt eadem: hæc enim dupla eſt, illa ſubdupla, quas non eſſe eaſdem (vt vult Grammaticus) mox oſtendam:

Secundum eſto: in eo ratio ab interuallo & differentia diſtinguitur, quod differentia & interuallum, ſit comparatio duarum quantitatum, in qua ſolùm ſpectatur, quantum terminus à termino differat, ſiue quis ſit exceſſus maioris ſupra minorem, ſiue quis defectus minoris à maiore: Ratio autem eſt comparatio duarum magnitudinum, in qua ſolum ſpectatur, quoties terminus in termino contineatur ſiue quam relationem habeat terminus ad terminum: v.g. in his numeris, 2. 1. interuallum ſeu differentia eſt vnitas, quâ duo excedunt vnum, at ratio eſt dupla; ſeu 2, bis continent vnitatem. quæ duo plane diuerſa ſunt: nam cognito duorum terminorum interuallo aut differentiâ, non ideo cognita eſt eorundem terminorum ratio: duorum ad vnum, interuallum eſt vnitas, item trium ad duo, interuallum idem eſt, nimirum vnitas, & tamen ratio 2 ad 1 dupla, non eadem eſt quæ 3 ad 2 ſeſqui: cum igitur ex noto interuallo aut differentiâ duarum quantitatum, non poſſit noſci earundem

magnitu-

magnitudinum ratio, palam eſt rationem ab interuallo & differentia plane diſtingui, neque iſta duo magis, quam cælum & terram poſſe confundi.

2. Quod aſſerit pag. 76. & alibi ſæpius, nimirum propoſitis duabus rationibus inæqualibus v. g. 12 ad 1 & 4 ad 1, exceſſum quo maior minorem ſuperat, eſſe rationem illam quæ reperitur inter vtriuſque rationis antecedentes terminos, veluti hic, rationem 12 ad 4, plane falſum eſt: ſi enim ratio 12 ad 4 ſit exceſſus quo ratio 12 ad 1, excedit rationem 4 ad 1, igitur ratio 12 ad 4 addita rationi 4 ad 1, æquatur rationi 12 ad 1; ſicut ſi 3 quo 4 excedunt 1, addam ipſi 1, vnú ſit 4: atqui ratio 12 ad 4, tripla, addita rationi 4 ad 1 quadruplæ, facit rationem ſeptuplam, ratio autem 12 ad 1 eſt duodecupla, igitur ratio 12 ad 4 non eſt exceſſus quo ratio 12 ad 1 excedit rationem 4 ad 1, neque vniuerſale eſt in cæteris omnibus: falſum igitur eſt quod aſſerit Grammaticus pag. 76. & alibi. porro exceſſus quo ratio 12 ad 1 excedit rationem 4 ad 1, eſt ratio 8 ad 1, hæc enim addita rationi 4 ad 1, facit rationem 12 ad 1.



3. Quod aſſerit pag. 121. *Rationem duplam 2 ad 1, eſſentia ſua æqualem eſſe ſubduplæ 1 ad 2, quia diſtantia magnitudinum vtriuſque rationis eſt æqualis: v. g. inter duplæ rationis magnitudines E F, G F, tanta diſtantia eſt, quanta inter ſubduplæ rationis magnitudines M N, M O*: plane eſt monſtroſum, & huic aſſertioni ſimile; inter magnitudines, ſeſquipedalem A, & pedalem C, eadem eſt diſtantia quæ inter pedalem C & ſemipedalem D (differentia enim vtrobique eadem eſt nimirum ſemipedalis) ergo quantitas ſeſquipedalis A, æqualis eſt ſemipedali D. argumentum profecto ſubtile, & tali Geometra dignum.

7	5
4	4
4	4
4	4
7	5

4. Quod aſſerit pag. 129. & ſeqq. nimirum in rationibus minoris inæqualitatis, quas defectiuas vocat, falſum eſſe, rationem 4 ad 5 eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe ratione 4 ad 7 eiuſdem ad maiorem, abſurdiſſimum eſt: cum enim vt fatetur ipſe, ratio 7 ad 4, maior ſit ratione 5 ad 4, quia illa magis excedit rationem æqualitatis 4 ad 4, quam hæc: inſuper ipſo fatente, rationes 4 ad 7, 4 ad 5, tantum deficiant à ratione æqualitatis 4 ad 4 quantum rationes 7 ad 4, 5 ad 4 eandem rationem 4 ad 4 excedunt, palam eſt rationem 4 ad 7 magis deficere à ratione æqualitatis quam ab eadem deficiat ratio 4 ad 5. igitur ratio 4 ad 7 minor eſt ratione 4 ad 5: ſicut è duabus lineis ab eadem maiore deficientibus, illa minor eſt quæ magis deficit, illa vero maior, quæ minus. veriſſima igitur & vniuerſalis eſt propoſ. 8. l. 5. Euclid.

5. Quod aſſerit pag. 146. diuerſi generis rationes, defectiuam & exceſſiuam quatenus vna maior aut minor alterâ eſt, non poſſe comparari, ineptum prorſus eſt & ageometricum; & his aſſertionibus ſimile: pars nequit comparari cum ſuo toto, aut totum cum parte, quia ſunt diuerſi generis; item quantitas pedali maior, nequit comparari cum quantitate, pedali minori, *quia exceſſiua & defectiua quantitates, inter ſe conferri non poſſunt: nam diuites cum diuitibus, debitores cum debitoribus comparantur, non autem diuites cum debitoribus.* quis huiuſmodi ferat ineptias? Ratio ſubdupla 1 ad 2, bis per additionem ſumpta, producit rationem æqualitatis 1 ad 1, & hæc bis ſumpta per additionem, gignit rationem duplam 2 ad 1: igitur ratio dupla 2 ad 1, quadrupla eſt rationis ſubduplæ 1 ad 2, & hæc quarta

pars

pars illius: ſimiliter ratio tripla 3 ad 1, ſextupla eſt rationis ſubtriplæ 1 ad 3,& ſic de cæteris: deinde videte egregiam Grammatici contradictionem: pag.105. *ratio dupla 2 ad 1, ſuperat rationem ſubduplam 1 ad 2, ratione bis duplâ, id eſt quadruplâ: quia ratio nihili 1 ad 1, ſuperat rationem 1 ad 2, ratione 2 ad 1, & rationem nihili, ſuperat ratio 2 ad 1, ratione 2 ad 1: ergo &c.* ſi ratio nihili ſuperet rationem 1 ad 2 ratione 2 ad 1 (quod plane falſum) & rationem nihili ſuperet ratio 2 ad 1 ratione 2 ad 1 (quod etiam falſum.) adeoque ratio 2 ad 1 ſuperet rationem 1 ad 2, ratione quadrupla (quod item falſum: nam illa huius præciſè quadrupla eſt) igitur ſecundum illum, ratio 2 ad 1 comparari poteſt cum ratione 1 ad 2, imo de facto comparatur, dum dicitur *ratio 2 ad 1 ſuperat rationem 1 ad 2 ratione quadrupla*, quod tamen fieri poſſe, deinde negat pag. 146. quid igitur mirum ſi Grammaticus Auctores alios non intelligat, cum nec illa quidem ipſa quæ ſcribit, vllo modo videatur percipere.

6. Pag.178.& ſeqq. triplici demonſtratione conatur oſtendere, rationem 6 ad 2, non eſſe duplam rationis 3 ad 2. ſed vt reliqua omnia, infeliciſſimè: nulla enim ex tribus, (præterquam quod ſingulæ tot pæne ſcateant vitiis quot verbis) ſpeciem aut vllam formam continet ſyllogiſmi: vt vel obiter legenti, etiam tyroni philoſopho manifeſtum eſt: nunc vitia pauca recenſebo: in 1. demonſtratione, vt alia omittam, falſum eſt 1. ranum 3 ad 2, 4 ad 3, differentialem rationem eſſe, 9 ad 8. falſum eſt 2. rationum 6 ad 2, 8 ad 3, rationem differentialem eſſe, 81 ad 64: vnde nil mirum ex abſurdis & falſis præmiſſis, inferri abſurdum. in 2. demonſtratione, falſum eſt 1. binarium eodem exceſſu ſuperare vnitatem, quo vnitas ſuperat nihilum: cum enim vnitas ſit vera quantitas, comparari nequit cum nihilo, adeoque vnitas non eſt exceſſus, quo vnitas ſuperat nihilum. falſum eſt 2. rationes duas ſimplas 6 ad 4, ſibi additas efficere rationem 9 ad 4; efficiunt enim 12 ad 4. denique concluſio nulla eſt, neque aſſumptum lemma quidquã ad rem facit. in 3. demonſtratione rurſus falſum eſt 1. rationum 9 ad 4, 6 ad 4, differentialem rationem eſſe 9 ad 6. differentialis enim eſt, ratio 3 ad 4, quæ addita rationi 6 ad 4 producit rationem 9 ad 4. falſum eſt 2. quod ratio 9 ad 4, eodem exceſſu ſuperet rationem 6 ad 4, quo hæc ſuperat rationem 4 ad 4. ratio enim 6 ad 4 excedit rationem 4 ad 4 ratione 2 ad 4, quia hæc addita rationi 4 ad 4 facit rationem 6 ad 4. exceſſus vero quo ratio 9 ad 4 excedit rationem 6 ad 4, eſt ratio 3 ad 4.

Nil aliud igitur triplici ſuâ demonſtratione probauit Euthymius, quã ſe nec philoſophum, nec Geometram vllum, ſed purum putum eſſe Grãmaticum.

CAPVT DECIMVMTERTIVM.

An rationes poſſint conſiderari vt fractiones.

EXplanatis iis, quæ ad veram genuinamque rationum naturam pertinere viſum eſt, ea ſupereſt difficultas, quæ præcipuas rationum affectiones, additionem, multiplicationem, ac compoſitionem inuoluit: atqui in illis, recentiorum pleroſque ita verſari video, vt rem per ſe non expeditam, reddiderint intricatiſſimamque, ſpecie differunt, in vnum confuderint, ipſaque rerum nomina penitus immutarint, quorum errorum

omnium

omnium ſola atque vnica cauſa eſt, quod ad eam regulam, quam Euclides, addendis, multiplicandis, &c. iis rationibus, quæ per numeros exprimi ſolent, adhibuit, rationum vniuerſim omnium operationes, non formarint: quare illorum errores ne ſequendo iterem, quas dixi rationum affectiones, ad Euclideam legem, quam 7, aliiſque elementorum libris, præſcripſit numeris, atque adeo rationibus per numeros expreſſis, veluti ad amuſſim regulamque longè certiſſimam, exigere conſilium eſt. quia vero in ſcribendis rationum terminis, eadem quæ in fractis obſeruatur methodus, operationeſque integrorum à fractis in nullo differant, ad horum normam veluti commodiorem, rationum formabo proprietates; quod antea quam ago, de fractionum rationumque ſimilitudine, & an in his perinde atque in illis procedi poſſit, in præſentia inquiram.

Fractio ſeu numerus fractus, eſt pars vna vel aliquot partes, integri vnius in aliquot partes æquales diuiſi: vt ſi totum aliquod ſectum ſit in partes quinque æquales, ſumaturque ex illis vna, vel duæ, aut tres, quæ cum omnibus integri partibus conferantur, duæ illæ, vel tres, vel vna, dicentur fractio ſeu numerus fractus.

Quælibet autem fractio duobus conſtat numeris, qui in ea proferenda exprimuntur: primus numerator dicitur, quia numerat quot partes fractio contineat ex illis, in quas totum diuiſum eſt. Denominator appellatur alter (ſiue vt alij, nomen, nominator, diuiſor) quia denominat partes in quas totum eſt diuiſum; vt cum proponitur fractio continens tres quintas, numerator eſt 3, denominator vero 5. ſcribitur autem prædicta fractio (vti & reliquæ) interiectâ lineolâ, numeratorem inter & denominatorem, hoc modo $\frac{3}{5}$.

Ratio vniuerſim definitur, duarum quarumcumque magnitudinum eiuſdem generis, mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.

In hoc igitur fractio cum ratione conuenit, quod vtraque ſit eſſentialiter relatiua, & certa termini ad terminum eiuſdem generis quoad quantitatem habitudo: illâ ſolum differentiâ, quod fractio ſit vnius vel aliquot partium totius diuiſi, ad omnes eiuſdem diuiſi partes habitudo, adeoque inter terminos conſiſtat commenſurabiles, ratio vero ſit habitudo cuiuſcunque quantitatis ad alteram eiuſdem generis.

Deinde, certum eſt vt rectè Candalla, ea quæ Euclides de numeris demonſtrat, non numeris tantum, ſed quibuſuis quantitatibus & rationibus per numeros expreſſis, conuenire; certum inſuper eſt, vt docet Clauius ad defin. v. lib. 6, ea quæ de numerorum proportionibus demonſtrãtur, conuenire magnitudinibus incommenſurabilibus, hoc eſt proportionibus irrationalibus; cum hæ ab illis in alio non differant, quam quod illarum denominatores numeris exprimi poſſint, harum vero non item: quæ differentia, naturam rationum vti nullo modo immutat, ita operationes & affectiones non variat: nam additio, multiplicatio &c. quæ rationibus rationalibus conueniunt, illis non conueniunt qua rationales, ſed quatenus ſunt rationes. certum igitur eſt, in rationibus vniuerſim eadem methodo procedi poſſe, quâ in numeris vtitur Euclides: cum autem numerorum operationes, à fractorum in nullo differant, vt demonſtrant Clauius, Volumnius, aliique, manifeſtum eſt rationum operationes quoad additionem, multiplicationem &c. ad leges fractionum rectè ac legitimè formari.

Neque id Auctor operis Geom. primus aut ſolus fecit; multò illum

ante præiuere Salignacus lib.2.cap.1. Heniſchius lib.3. Volumnius Rodulphus, Cardanus. Clauius aliique Geometræ egregij, qui præfatam doctrinam, expreſſis non tantum tradunt verbis, ſed vel inde maximè docent, rationum additionem à multiplicatione, ſubductionem à diuiſione, perinde atque in numeris diſtingui planè debere. quod recentiores alij rectè ſi percepiſſent, non vtique tot, eoſque grauiſſimos errores, vbi de rationum agunt additione, &c (vti deinceps demonſtrabo) accumulaſſent.

At grauiter doctrina illa diſplicet Cenſori, bilemque in Auctorem oper. Geom. vehementius accendit: audiatur Decretoria illius vox, quâ lectorem in exordio tractatus, quo librum de proport. cenſet, affatur. *Antequam ſingulas, inquit, propoſitiones recenſeam, moneo tot errorum vnicam eſſe cauſam: vnde vix poteſt nobilius exemplum adferri, quo oſtendatur quam periculoſus ſit error in principiis: in hoc itaque falſus eſt P. Gregorius, quod rationes conſiderarit vt fractiones, & putauerit duos terminos qui pro denominatore rationis ſingularis aſſignantur, quia ad modum fractionis ſcribi ſolent, naturam fractionum earũq. affectiones ſequi: vnde quidquid de fractionibus demonſtratur, hic rationibus applicuit &c. vnde melius fuiſſet inſcriptus hic liber, de rationibus fractionum, quam de proportionalitatibus, ſiue de rationibus rationum: quare ſi omnes eius propoſitiones fractionibus applicentur, vera eſſe deprehendentur, & hic ſaltem erit tanti tractatus aliqualis vſus.*

Præclara hæc eſt cenſura, & tam vanitatis quam falſitatis plena: cenſuram & illa viciſſim quam meretur non euaderet, ſi perinde mihi atque illi lubuit, luberet ineptire. vnum illud Cenſorem moneo, res geometricas melius inpoſterum vt expendat, priuſquam ad cenſuras ſimiles, immaturæ conſiderationis indices, deueniat.

Reiiciuntur errores Euthymij Grammatici.

PRiori Cenſuræ ſimilem dedit Grammaticus pag. 203. his verbis: *hoc autem maximè animaduerſione dignum, non tantum falſa hac Gregorij Theoremata, ſed & omnes veterum ac iuniorum paralogiſmos, ex eo fonte manaſſe, quod Geometricas rationes, & minutias Arithmeticas eandem contemplationem admittere putarint.*

Pag. 132. duplicem tradit minutiarum conſiderationem, quarum vnã vult rationibus geometricis conuenire, aliam non: vnde illam geometricam vocat, hanc vero Arithmeticam. *Geometricè conſiderantur minutia, quatenus ſpectantur ſecundum diſtantiam antecedentis ſeu numeratoris à conſequente ſeu denominatore; Arithmeticè vero, quatenus numerantur partes integri.*

Porro *minutiæ differunt à rationibus Geometricis, quod rationis duo termini, vnam dumtaxat notionem ingerant, ſpatium nempe inter vtrumque terminum interiectum. minutiæ autem duo termini, duas notiones includunt, numeratoris à denominatore diſtantiam, & partium denominatoris numerationem: quam ob rem ſecundum geometriam, ratio 6 ad 4, æqualis eſt duabus rationibus 6 ad 5 & 5 ad 4. at minutia* $\frac{6}{4}$ *ſecundum Arithmeticam, æqualis eſt duabus minutiis* $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{4}$. *atque hinc quoque eſt, quod omnes minutiæ inter ſe ſint commenſurabiles, cum contra diuerſi fundi rationes, nullam communem menſuram admittant, adeoque nec rationem inter ſe habeant effabilem. vnde porro liquet, rationum ac minutiarum diuerſam eſſe additionem & ſubtractionem. præterea minutias ob denominatoris*

natoris illam numerationem per numeros multiplicari poſſe ac diuidi, rationes vero nequaquam; Euclides vero ex Arithmeticâ conſideratione minutiarum, quatenus partes integri numerantur, falſum iſtud Theorema (8.v.) *fabricauit.*

Multiplex hic rurſus error. 1. quod Geometricè velit conſiderari minutias, dum diſtantia termini à termino, ſeu numeratoris à denominatore conſideratur, id enim falſum eſt: quemadmodum enim rationis eſſentia non conſiſtit in diſtantia antecedentis à conſequente, ſed in mutua illorum relatione, ita minutiæ (quæ Geometricè conſideratæ, ſunt veræ rationes) non dicuntur geometricè ſpectari, dum conſideratur diſtantia numeratoris à denominatore, (hæc enim potius eſt arithmetica conſideratio ſicut interuallorum aut differentiarum in numeris contemplatio) ſed dum conſideratur habitudo ſeu mutua relatio termini ad terminum, numeratoris ad denominatorem.

2. Quod ratio 6 ad 4 ſit æqualis duabus rationibus 6 ad 5. & 5 ad 4. id enim plane falſum eſt: ratio enim 6 ad 4, æqualis eſt duabus rationibus 5 ad 4 & 1 ad 4, hæc enim addita rationi 5 ad 4, facit rationem 6 ad 4. prout minutia $\frac{6}{4}$ geometricè æqualis eſt duabus minutiis $\frac{11}{44}$.

3. Quod diuerſi fundi rationes nullam communem menſuram admittant, adeoque nec rationem habeant effabilem: id enim falſum eſſe oſtẽdi cap. 4 ſub finem.

4. Quod rationum ac minutiarum diuerſa ſit additio & ſubtractio: hoc enim falſum eſſe patebit ex cap. ſeq.

5. Quod rationes per rationes non poſſint multiplicari: quod falſum eſſe oſtendam cap. 15. huius.

6. Quod Euclides ex arithmeticâ minutiarum conſideratione falſum Theorema (8. lib. v.) fabricarit; id enim apertè falſum eſt: Euclides enim ex verè Geometricâ rationum conſideratione, veriſſimum Theorema confecit: vt oſtenſum cap. 12. huius.

CAPVT DECIMVMQVARTVM.

De Rationum additione.

DE Rationum additione ſcripſere Nabodus, Nonnius, Tartaglia, Lucas, Cardanus, Gemma Friſius, Tonſtallus, Butheo, Ramus, Goſſelinus, Salignacus, Heniſchius, Mycillus, Stifelius &c. ſed illorum plerique, loco additionis, faciunt veram rationum multiplicationem; & quod perridiculum eſt, cum in rationum compoſitione, ſolam agnoſcant additionem, nil minus agunt, quam rationes addere; & quod minimè volunt, rationes nimirum multiplicare, id vnicè agunt.

PARS PRIMA.

An additio rationum ab earundem multiplicatione differat, & in quo.

OStenſum eſt cap. 1. Rationes æque veras eſſe quantitates, atque ſunt lineæ, ſuperficies &c. adeoque eas omnes illis deberi affectiones, quæ his communes ſunt; atqui longè diuerſa ſunt, lineam lineæ, ſuper-

ficiem ſuperficiei addere,& lineam in lineam, ſuperficiem in ſuperficiẽ ducere;neceſſario igitur etiam differunt,rationum additio,& earundem multiplicatio.

Secundò:oſtenſum eſt cap. præced: rationes rectè conſiderari vt fractiones;& iiſdem vtrarumque affectiones legibus conſtringi : cum itaque tam in numeris integris, quam fractis, ſpecie differant, additio & multiplicatio,eaſdem etiam in rationibus differre ſpecie, manifeſtum eſt.

Tertiò:datis tribus v.g. rationibus quibuſuis,duplâ,triplâ, quadruplâ; certum eſt,aliam prodire ſummam ex additione denominatorum illarum rationum,aliam ex eorundem multiplicatione; nam ex additione denominatorũ 2,3,4,ſumma eſt 9;ex multiplicatione,ſumma eſt 24:atqui rationes ſe habent vt denominatores,aliud igitur producitur ex additione rationũ,duplæ,quadruplæ,triplæ,aliud ex earundem multiplicatione;& ſicuti denominatorum additio,ſpecie differt ab eorũdem multiplicatione,ita quoque rationum additio, ſpecie differt ab earundem multiplicatione.

Quartò:datis tribus continuè proportionalibus,9. 3.1. ratio 9 ad 1, ſecundum omnes,bis continet rationem triplam, 3 ad 1 atqui continentia illa,non eſt additionis, ſed multiplicationis, vt oſtendi cap.3. aliud igitur eſt rationes per additionem copulare , aliud per multiplicationem.

Denique præter antiquos,idem docent,Candalla,Salignacus, Cardanus,Clauius &c.& Cardanus quidem lib.5.de proportionibus,prop[illegible].12, his proponit verbis:*propoſitis duabus proportionibus,vnam alteri iungere , abſque multiplicatiòne*;quam deinde ibidem demonſtrat. Salignacus lib.2.ca: 14:*rationem,inquit,duplicare,triplicare,quadruplicare,non eſt rationem bis, ter, aut quater poſitam addere,vt vulgus exiſtimat , ſed eam continuè in ſe,bis, ter, quater poſitam multiplicare:ratio 3 ad 1,bis,ter,quater poſita ſibi addita , eſt* 6,9, 12; *at eadem bis,ter,quater poſita continuè in ſeſe multiplicata , eſt* 9.27.81. *quid ita? quia in additione,ſumma additis,vt totum ſuis partibus æquatur ; at in multiplicatione,vt vnitas ad alterum multiplicantium, ſic reliquus eſt ad factum.* idẽ fuſè oſtendit Clauius ad finem lib.9.

Differt igitur rationum additio, ab earundem multiplicatione, ſicut fractionum additio,ab earundem multiplicatione;lineæ ad lineam additio,ab earundem in inuicem ductu.

PARS SECVNDA.

Quomodo fiat rationum additio.

QVoniam rationum additio ab earundem multiplicatione ſpecie differt,vt paulo ante oſtenſum,vocetur *rationum additio, duarum vel plurium rationum,in vnam rationem,collectio.*

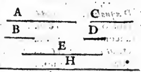
Triplici methodo ea perfici poteſt;vnâ quam Arithmetici minutiis in vnam ſummam colligendis adhibent, [illegible]minâ alterâ,quâ vtitur Auctor oper.Geom.

Porro minutiarum collectio ſic inſtituitur: ſint duæ minutiæ diuerſarum denominationum addendæ, $\frac{2}{3}$ — $\frac{3}{4}$ multiplica 2 numeratorem prioris,

prioris,per 4 denominatorem poſterioris,in formam crucis: item 3 numeratorem poſterioris,per 3 denominatorem prioris: productoſque numeros,8 & 9, in vnam ſummam collige,vt fiat numerator 17: dein productum ex multiplicatione denominatorum 3 in 4. nempe 12,erit denominator minutiæ collectæ,quæ erit $\frac{17}{12}$.

12 A X C 8 | K 56
4 B D 2 | L 8
F 24. G 32

Methodum hanc addendis rationibus ſic applicabimus; ſint duæ quæuis rationes addendæ A B, C D. duc A in D,& productum ſit F. duc C in B, & productum ſit G: aggregatum ex F & G,eſto K. denique productum ex D in B,ſit L; erit ratio K ad L,ſumma rationum A B, C D ſibi additarum.



Geometricè autẽ quaſcunque duas rationes in vnam colligemus, hoc modo. ſint duæ rationes A B, C D: fiatque vt D ad C,ita B ad E: aggregatum ex A & E,ponatur H: dico rationem H ad B,ſummam eſſe rationum AB,CD. cum enim rationi CD, æqualis ex conſtr. ſit ratio E B, igitur AB ratio,vna cum ratione EB, æquatur rationi AB, vna cùm ratione CD: quia vero aggregatum ex A & E, ponitur H; ratio H ad B (per 114. de proport.) æquatur duabus rationibus A B, E B, hoc eſt rationibus A B, C D: ratio igitur H ad B,ſumma eſt rationum A B, C D.

12 A C 8
4 B D 2
E 16
H 28

Hanc autem veram ac legitimam eſſe colligendis in vnam rationibus methodum, ex eo collige; quod eadem per hanc producatur ratio, quæ per praxim arithmeticam prius exhibitam: apponantur enim quatuor terminis A,B,C, D, iidem numeri, quibus antea vſi ſumus: ſitque A 12,B 4, C 8, D 2.& fiat vt D 2 ad C 8,ita B 4 ad E; erit E 16. ſumma autem ex A 12 & E 16, ſit H 28. erit ratio H ad B,ratio 28 ad 4,quæ eadem eſt cum ratione K ad L, 56 ad 8.

A 3 C 4 | F 7
B 10 D 10 | G 10
K M | P
L | L

Sint iam duæ minutiæ addendæ eiuſdem denominationis, A B, C D; adde A ipſi C,& ſumma ſit F: cui ſuppone communem denominationem G; erit minutia F G, ſumma minutiarum A B, C D. ſimili prorſus modo,fiet additio duarum rationum commune habentium conſequens: ſint quæuis rationes duæ K L, M L; adde K ipſi M, & ſumma ſit P; erit ratio P ad L,æqualis duabus rationibus K L, M L, per 114 de proport.

E 4
A 6 C 8
B 2 D 4
F 10.
G 2.

Porro vniuerſalis & facillima rationes addendi methodus,eſt huiuſmodi: ſint duæ rationes AB, CD, quas addere oporteat: reuocentur illæ ad commune conſequens,hoc modo: fiat vt D ad C,ita B ad E; tum A,addatur ipſi E: dico rationem A E ad B, ſiue F ad G,eſſe ſummam rationũ A B, C D ſibi additarũ. patet: nam per 114 de proport. duæ rationes A B, E B, ſimul ſumptæ, æquales ſunt rationi ex A & E ad B; eſt autem per conſtr. ratio E B, eadem quæ ratio C D, igitur etiam duæ rationes A B, C D ſimul ſumptæ,æquales ſunt rationi ex A & E ad B, ſiue rationi F ad G.

Aſſumpſi in hac demonſtratione & prioribus, propoſitionem 114 de proportionalitatibus;

A B C
D

Quæ eſt huiuſmodi. *Data ſit quæuis quantitas* ⌣*A C, vtcumque diuiſa in B; & alia quantitas D, dico rationem* ⌣*A B ad D, vnà cum ratione B C ad D, æqualem eſſe rationi A C ad D.*

A B C
D

Propoſitionem hanc ita perſtringit Cēſor A A: *eſt falſa hæc propoſitio: cumque huic innitatur tota quadraturarum moles, paulò eſt examinanda. ratio A C ad D, eſt æqualis rationibus A C ad A B, plus A B ad D: ergo rationes A C ad A B, plus* ⌣*A B ad D, æquantur rationibus A B ad D, plus B C ad D; ergo rationes A C ad A B, & B C ad D, ſunt neceſſario æquales; quod eſt falſum: cum quantitas* ⌣*A C, diuiſa ſit vtcunque. ſed ſit A B, æqualis D, cum ratio æqualitatis alteri iuncta nihil immutet, erit ratio B C ad D, æqualis rationi* ⌣*A C ad D: pars toti, quo nihil abſurdius.*

Doleo ex animo Cenſorem tam vbique in ſuis demonſtrationibus eſſe infelicem: ecce in prima demonſtrationis linea, quam præclarè paralogiſet: *ratio inquit A C ad D, eſt æqualis rationibus A C ad* ⌣*A B, plus A B ad D.* quæro, vbi & à quo, id vnquam ſit demonſtratum? an à Cenſore? quâ ratione? cur demonſtratio non adfertur? an aſſertio illa tam clara eſt, vt demonſtratione non egeat? at illam falſam eſſe, ſic in numeris demonſtro.

A B C
4 8
D
2

Sit A C primum inæqualiter diuiſa in B. & A B quidem ſit 4, BC verò 8, at D 2. ratio A C ad D, in minimis numeris eſt ſextupla; ratio AC ad A B, eſt tripla; & ratio A B ad D dupla: tripla autem plus duplâ, facit quintuplam: rationes igitur A C ad A B, plus A B ad D, non ſunt æquales rationi A C ad D, quæ ſextupla eſt.

A B C
6 6
D
2

Rurſum ſit A C diuiſa bifariam in B; & A B quidem ſit 6, vti & BC; D vero 2. ratio A C ad D, eſt ſextupla; ratio A C ad A B dupla, & ratio A B ad D tripla: ſed dupla plus triplâ facit quintuplam, rationes igitur A C ad A B, plus A B ad D, non æquantur rationi A C ad D, quæ ſextupla eſt.

A B C
4 8
D
4

Tertiò ſit A C inæqualiter diuiſa in B. & A B quidem ſit 4 B C vero 8. at D 4, æqualis A B. ratio A C ad D eſt tripla, ratio quoque A C ad A B tripla eſt, ratio autem A B ad D, æqualitatis 1 ad 1; triplæ autem ſi addatur ſimpla 1 ad 1, facit quadruplam, vt oſtendi cap. 9. rationes igitur A C ad A B, plus AB ad D, non ſunt æquales rationi A C ad D, quæ tantum tripla eſt.

Infeliciſſima igitur Cenſoris eſt demonſtratio, veraque manet & inconcuſſa Auctoris propoſitio.

A8 C3 E24
B3 D2 F6.

Rationum additionem hâc methodo inſtituūt ex ſupradictis Auctoribus, plerique: ſint AB, CD rationes quæuis duæ in vnam colligendæ. duc A in C, & productum ſit E. duc B in D, & productum ſit F. ratio E ad F, erit ſumma rationum AB, CD in vnam collectarum. atque hinc inferunt rationum additionem, à multiplicatione fractionum non differre:

At

At in vtroque vehementer ſunt decepti;cum operatio illa, non ſit rationum additio,ſed vera earundem multiplicatio, vt patebit ex ſequenti capite.

Quæ Euthymius Grammaticus de rationum additione tradit, partim reliquis erroribus ſunt conformia,partim adeo inepta, vt iis vel recenſendis,pudeat inhærere.

CAPVT DECIMVMQVINTVM.

De Rationum compoſitione & multiplicatione.

PARS PRIMA.

De compoſitione.

POſteaquam Euclides lib.5.defin.10,de iis rationibus egit,quæ inter extremos continuè proportionalium terminos exiſtunt; & primæ quidem ad tertiam,rationem vocauit duplicatam eius, quam habet prima ad ſecundam;primæ vero ad quartam,eiuſdem triplicatam &c.ad pleniorem rationum doctrinam,docet lib.6.defin.5.eam rationem, quæ inter extremos terminos, interiectis quotuis & quibuſuis aliis eiuſdem generis exiſtit,componi ex omnibus rationibus, quæ reperiuntur inter quantitates interiectas. atque de hoc nulla inter Auctores eſt controuerſia: cum id ab Euclide,Apollonio,Archimede, Pappo, Theone,totaque Geometria hucuſque admiſſum ſit vt indubitatum,& infallibile: de modo autem quo compoſitio illa fiat,magna.Nabodus enim, Goſſelinus Butheo,Ramus,Tartaglia,Gemmafrigius,Mycillus,Heniſchius,Tonſtallus,aliique complures, contendunt rationum compoſitionem, nil aliud eſſe,quam earundem additionem; & quæ quidem fieri debeat ad eam normam,quâ minutiarum multiplicatio:cuius opinionis, ſolum & vnicum fundamentum eſt, quod alia præter additionem, non detur rationum copulatio.at verior & omnino tenenda eſt ſententia Clauij,Candallæ, aliorumque Euclidem & antiquos ſequentium, quæ docet in rationum compoſitione,nullam aliam interuenire operationem, quam rationum multiplicationem ab earundem additione,ſpecie diſtinctam.

Quæ veritas plurium demonſtrationibus confirmata cum ſit,vnicam breuitatis cauſa,ex Clauio adferre non pigebit.

A6.	C12.	
B2.	D4	
E	F	G
72	8	24

Sint,duæ rationes A B, C D qualeſcunque; ducatur A in C,& producat E. ducatur B in D, & producatur F. dico rationem E ad F,productam eſſe ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D. fiat enim G,ex B in C. quia,ex A,B in C,fiunt E,& G;erit vt A ad B, ita E ad G,per 18.7.rurſus,quia ex B in C,D;fiunt G & F,erit vt C ad D, ita G ad F,per 17.7.componitur autem ratio E ad F,ex rationibus E ad G,& G ad F ex defin.5.6.igitur eadem proportio E ad F, componitur ex rationibus A ad B,& C ad D;cum hæ eædem ſint quæ E ad G,& G ad F.cum autem compoſitio rationum ab Euclide deſcripta, reſpondeat multiplicationi denominatorum inter ſe,vt ibi demonſtrauimus, noſtra vero multiplicatio,

tio, à multiplicatione denominatorum non differat, liquidò conſtat, cõpoſitionem illam rationum eſſe multiplicationem, quam tradidimus. aliâ demonſtratione perficit idem ſub finem lib. 9, vbi docet, minutiam vnam per alteram multiplicare.

Eadem veritas patet ex abſurdis, quæ neceſſario conſequuntur, ſi cõpoſitio rationum ſit earundem additio. ſi enim ita ſit, igitur ratio ex pluribus rationibus compoſita, eſt verè totum quidpiam, cuius partes ſunt rationes, ex quibus ſibi additis, componi dicitur: igitur in his tribus terminis 1, 10, 100; ratio 1 ad 100, erit duplo maior, ratione 1 ad 10; ſiue erit coaceruata ex duabus rationibus æqualibus, 1 ad 10, & 10 ad 100, ſibi additis. hoc poſito, quis non videat, partem ſuo toto eſſe maiorem? nimirum rationem 1 ad 10, quæ pars eſt, maiorem eſſe ratione 1 ad 100? in his autem 4. 4. 4. partem eſſe æqualem toti? rurſum in his non continuè proportionalibus, 4, 2, 8. ratio 4 ad 8, vere coaceruabitur ex rationibus 4 ad 2, & 2 ad 8, tanquam ex partibus: at ratio 4 ad 2 dupla, maior eſt ratione ſubduplâ 4 ad 8, rurſum igitur pars toto ſuo maior eſt. ita Clauius, Salignacus &c.

At Petrus Nonnius, cap. 7. abſurda illa abſque vllo ſcrupulo deglutit, admittitque diſertis verbis, in rationibus, partem maiorem eſſe ſuo toto, atque in illis principium hoc, *totum eſt maius ſua parte*, locum non habere; cuius aſſerti, tota & vnica eſt probatio, quod rationes non ſint propriè quantitates. vtrumque ineptè: & probationis quidem falſitatem oſtendi cap. 1. aſſertio verò ipſa, aliam reſponſionem non meretur, præter eam, quam adfert Salignacus lib. 2. c. 1. *potius, inquit, totam matheſim, potius vniuerſam naturam deſtruxeris, quam principium illud, in vllo rerum aut rationum genere, vel tantillum infirmaris; nulla ſcientia abſurdorum eſt: igitur nec mathematica, totum ſuâ parte minus, aut partem ſuo toto maiorem dicet.*

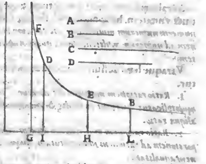
PARS SECVNDA.

Reiicitur ſpecialiter doctrina Cenſoris de rationum compoſitione.

PRæcedentium Auctorum erroribus, alterum de ſuo adiecit Cenſor: *patet, inquit, quid ſit rationum compoſitio; quæ nil aliud eſt, quam rationum vnio, ſiue fiat additio, ſiue ablatio; prout ſunt eiuſdem, vel diuerſi ordinis; quemadmodum logarithmi productorum, fiunt per additionem & ſubtractionem logarithmorum producentium; & in hoc conſiſtit eorum natura; quod enim in progreſſione geometrica, fit per multiplicationem & diuiſionem, hoc in arithmetica correſpondente fit per additionem; vnde neminem mouere debet, quod pro additione rationum, debeat fieri multiplicatio terminorum, hoc enim neceſſarium eſt, vt patet ex natura progreſſionum: cum termini ſint in progreſſione geometrica (in qua vt aliquid oriatur debet fieri multiplicatio) & rationes in arithmetica, quæ additionem exigit.*

Quam doctrinam Theorem. 3. in hyperbola ſic conatur demonſtrare. *Ratio inter duos terminos, componitur ex omnibus rationibus, inter terminos qui medij ſumuntur. ſit ratio A ad D; dico eam componi ex rationibus A ad B, plus B ad C, plus C ad D. fiat enim in hyperbola, B L ad E H, vt A ad B: & E H ad F G, vt B ad C: & F G ad D I, vt C ad D; erit ſpatium*

LBDI,



ſto BDI; quantitas rationis A ad D: ſed hoc ſpatiũ æquale eſt ſpatio L B E H, ſeu rationi A ad B, plus ſpatio E H F G, ſeu ratione B ad C; minus ſpatio F G D I, ſeu ratione C ad D: (quæ ſubtrahitur, quod ſit ordinis contrarij) ergo ratio inter duos terminos, componitur ſeu æqualis eſt, rationibus inter terminos medios.

Tota hæc Cenſoris doctrina peccat in pluribus. 1. quod cum rationum compoſitionem, contendat fieri per additionem; illam explicet per logarithmos & ſpatia hyperbolica; quorum vnicum & totum munus eſt, exhibere qualis ſit rationum multiplicatio, ſiue in ſerie geometrica, ſiue inter lineas, ſpatia hyperbolica includentes, vt oſtenſum cap. 9.

2. Peccat: quod pro additione rationum, velit fieri multiplicationem terminorum, nimirum antecedentis in antecedens, conſequentis in conſequens: quod meritò Geometras mouere debet, cùm illâ methodo, vera fiat rationum multiplicatio: vt ante oſtenſum eſt ex Clauio.

3. Peccat: quod ſpatia hyperbolica L B D I, L B E H, E H F G, vocet quantitates rationum, A D, B C, C D; id enim plane falſum eſſe oſtendi cap. 9. huius.

4. Peccat dum ait; rationem A D, componi ex rationibus, A B plus B C, plus C D. id enim apertè falſum eſſe oſtenſum eſt ante; vbi demonſtratum eſt, compoſitionem rationum, fieri per veram multiplicationem, non autem per additionem: τὸ *plus* verò, hîc additionem ſonat.

Tota igitur Cenſoris de rationum compoſitione doctrina, erronea eſt.

PARS TERTIA

De rationum multiplicatione.

RAtionum compoſitionem per veram fieri rationum multiplicationem demonſtratum eſt, vt ante monui, à pluribus: quid vero ſit rationem vnam per alteram multiplicare, & quâ fieri id poſſit methodo, ſpeciatim modo eſt dicendum.

Euclides lib. 7. defin. 15. quid ſit numerum vnum, per alterum multiplicare, ſic definit. *numerus numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, ac procreatus fuerit aliquis:*

Ex hac definitione, pulcherrima hæc emanat notio: *numerus ex multiplicatione productus, eandem habet rationem ad alterutrum multiplicantium, quam habet alter multiplicantium, ad vnitatem.* cum enim ex definitione, alteruter multiplicantium, toties componendus ſit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus,

toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium, continet vnitatem. hinc multiplicatio numeri per numerum, aliter definitur: *numerus numerum multiplicare dicitur, cum productus numerus, eam habet rationem ad numerum multiplicatum, quam numerus multiplicans, habet ad vnitatem.*

Vtraque hæc definitio rationum multiplicationi hoc modo applicatur.

1. *Ratio rationem multiplicare dicatur, cum toties compoſita fuerit ea quæ multiplicatur, quot ſunt in multiplicante, rationes æqualitatis, & procreata fuerit aliqua ratio.*

2. *Ratio rationem multiplicare dicatur, cum procreata ratio, eam habuerit proportionem ad rationem multiplicatam, quam ratio multiplicans, habet ad rationem æqualitatis.*

Ex his definitionibus ſequentes formantur & demonſtrantur propoſitiones.

I.

Sint duæ quæuis rationes A B, C D, & quoties ratio æqualitatis, continetur in ratione C D, toties componatur ratio A B, & producat rationem E F.

Dico rationem E F, productam eſſe, ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

A4	C6	E8
B2	D3	F2

Cum enim ratio A B, toties compoſita, quoties ratio æqualitatis eſt in ratione C D, producat rationem E F; ratio igitur E F, toties continet rationem multiplicatam A B, quoties ratio multiplicans C D, continet rationem æqualitatis: igitur eadem eſt proportio rationis productæ E F, ad multiplicatam A B, quæ rationis multiplicantis C D eſt ad rationem æqualitatis; igitur per defin. 2. ratio E F producta eſt ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

II.

A4	C6	E24
B3	D2	F6

Sint duæ quæuis rationes A B, C D: & A in C producat E, B in D, producat F.

Dico rationem E ad F, productam eſſe ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

Hæc aſſertio demonſtrata eſt à Clauio duplici modo, & ab aliis deinceps aliter, quare nouam demonſtrationem addere, operæ pretium non eſt.

III.

A C
B D
E

Sint duæ quæuis rationes A B, C D, fiatque vt C ad D, ita B ad E.

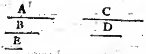
Dico rationem A ad E, productam eſſe ex multiplicatione rationis A B, per rationem C D.

Ratio A ad E, componitur ex ratione A B, ducta in rationem B E, per Euclidem; ſed B E ratio, per conſtr. eſt ratio C D, igitur ratio A E, producta eſt ex ratione A B, ducta in rationem C D.

IV. Ratio

IV.

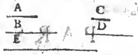
Ratio producta, ex multiplicatione rationis maioris inæqualitatis, per alteram maioris inæqualitatis, eſt ratio maioris inæqualitatis, & vtrâuis multiplicantium maior.



Sint enim duæ quæuis rationes maioris inæqualitatis, A B, C D: fiatque vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex ductu mutuo rationum A B, C D, vt ante demonſtratum eſt: quia vero eſt, vt C maior ad minorem D, ita B ad E, erit E, minor quàm B, adeoque A E ratio, maioris eſt inæqualitatis, & maior, tam ratione A B, quàm BE, hoc eſt CD; per 8. v. Euclidis.

V.

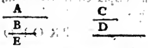
Ratio producta, ex multiplicatione rationis A B minoris inæqualitatis, per C D rationem etiam minoris inæqualitatis, ſemper eſt minoris inæqualitatis & vtrâuis multiplicantium minor.



Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex multiplicatione mutua rationum A B, C D: quia vero eſt vt C ad D, minor ad maiorem, ita B ad E, erit E maior quàm B, adeoque ratio A ad E minoris inæqualitatis, & minor tam ratione A B, quam B E, hoc eſt C D; per 8. v.

VI.

Ratio producta ex multiplicatione rationis A B maioris inæqualitatis, per rationem C D minoris inæqualitatis minor eſt quidem ratione maioris inæqualitatis A B, at maior ratione C D minoris inæqualitatis.



Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex ductu mutuo rationum A B, C D. quia vero eſt vt C ad D, minor ad maiorem, ita B ad E; erit E maior quam B, adeoque ratio A ad E, minor ratione AB, & maior ratione B ad E, hoc eſt C ad D. per 8. v.

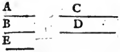
VII.

Ratio producta ex multiplicatione rationis AB, maioris vel minoris inæqualitatis, per rationem æqualitatis C D, eadem eſt cum ratione A ad B.



Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex mutua multiplicatione rationum A B, C D. quia vero eſt vt C ad D, ita B ad E; erit E æqualis B, adeoque ratio A E, eadem cum ratione A B.

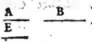
VIII.



Ratio producta ex multiplicatione rationis æqualitatis A B, per alteram rationem æqualitatis C D, eſt ratio æqualitatis.

Fiat enim vt C ad D, ita B ad E; erit A E ratio, producta ex ductu mutuo rationum A B, C D; quia vero eſt vt C ad D, ita B ad E, erit E æqualis B, adeoque & ipſi A: & A E ratio æqualitatis.

IX.



Ratio producta ex multiplicatione rationis cuiuſuis A B, per rationem B ad A, ſemper eſt æqualitatis.

Sumatur enim E, æqualis A: ratio A ad E, per Euclidem componitur, ex multiplicatione rationum A B; B E, hoc eſt B A: igitur &c.

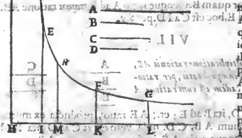
PARS QVARTA.

Vnde dignoſci queat, vtra ex duabus rationibus propoſitis, ſit alterius multiplicata, & quoties.

PRopoſitis duabus rationibus, de quibus inquiritur, vtra alterius ſit multiplicata, & quoties; vel vtraque maioris eſt inæqualitatis, vel minoris, vel illarum vna maioris, altera minoris inæqualitatis; ſuam ſingulis præſcribemus regulam, & demonſtratione geometricâ ſtabiliemus.

PROPOSITIO X.

OMnis ratio maioris inæqualitatis, multiplicata eſt alterius rationis maioris inæqualitatis, quæ priori minor eſt.

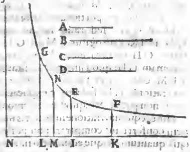


Sint duæ rationes maioris inæqualitatis, A B; C D; & A B quidem ratio, ſit maior ratione C D: dico illam, huius eſſe multiplicatam; ſeu rationē A B, continere per multiplicationē rationē C D, ponātur in hyperbola E F G, rectæ E I, F K, paralelæ alteri aſymptototum &, proportionales ipſis A, B. fiatque vt C ad D, ita F K ad G L, (quæ fieri poſſe patet ex lib. Auctoris de hyperbola.) cum igitur per conſtr. ratio E I ad F K, ſit ratio A ad B, & ratio F K ad G L, ſit ratio

ratio C ad D; atque ex hypotheſi, ratio A B ſit maior ratione C D, erit quoque ratio E I ad F K, maior ratione F K ad G L: quia vero per 78. de hyperb. eſt vt G L ad F K, ita H K ad H L, & vt F K ad E I, ſic H I ad H K, ratio quoque H K ad H I, maior eſt ratione H L ad H K: fiat igitur vt L H ad H K, ſic H K ad M H, ponaturque M N paralela E I, cadet N M inter E I, & F K: (cum enim L H, K H, M H continuè ſint proportionales, etiam N M, F K, G L continuè erunt proportionales; & ratio N M ad F K, æqualis rationi F K ad G L, maior autem eſt ratio E I ad F K, ratione F K ad G L ex hypotheſi, igitur & ratio E I ad F K, maior eſt ratione N M ad F K, adeoque E I maior, quam N M, per 8. v. quare hæc cadit inter E I & F K) & ſpatium E I F K, maius eſt ſpatio N M F K. quia autem rectæ N M, F K, G L, ſunt continuè proportionales, ſpatio N M F K, æquatur ſpatium F K G L, per 130. de hyperb. igitur ſpatium E I F K, maius quoque eſt ſpatio F K G L: ſed quam multiplex eſt ſpatium E I F K, ſpatij F K G L, toties ratio E I ad F K, multiplicat rationem F K ad G L; igitur quam multiplex eſt ſpatium E I F K, ſpatij F K G L, toties A B ratio, per multiplicationem continet rationem C D. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

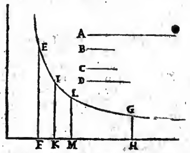
Omnis ratio minoris inæqualitatis, multiplicata eſt alterius rationis minoris inæqualitatis, quæ priori maior eſt.



Sint A B, C D, rationes duæ minoris inæqualitatis & quidē C D ratio; ſit maior ratione A B: dico hanc, illius eſſe multiplicatam. ponantur in hyperbola rectæ E I, G L, paralelæ vni aſymptotorum, & proportionales rectis A, B. fiatque vt D ad C, ita E I ad F K: erit ratio F K ad E I, æqualis rationi C ad D, adeoque maior ratione A ad B, hoc eſt E I ad G L. quia vero eſt, vt F K ad E I, ſic H I ad H K, & vt E I ad G L, ſic H L ad H I, erit quoque ratio H I ad H K, maior ratione H L ad H I: fiat igitur vt H K ad H I, ſic H I ad H M, ponaturque M N paralela G L, cadet N M, inter G L & E I: (cum enim ratio E I ad N M, ſit eadem cum ratione F K ad E I, ratio autem F K ad E I, maior ſit ratione E I ad G L, erit ratio E I ad N M, maior ratione E I ad G L, adeoque N M linea, minor quam G L: per 8. v. quare N M, cadit inter G L & E I) & ſpatium E I G L, maius ſpatio E I N M: quia vero N M, E I, F K, per conſtr. continuè ſunt proportionales, ſpatio E I N M, æquatur ſpatium F K E I; quare ſpatium E I G L, maius quoque eſt ſpatio F K E I. ſed per 129. de hyperb. quam multiplex eſt ſpatium E I G L, ſpatij F K E I, toties ratio E I ad G L, multiplicat rationem F K ad E I, igitur etiam quam multiplex eſt ſpatium E I G L, ſpatij F K E I, toties A B ratio, multiplicat rationem C D: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Sint dua rationes AB, CD; & AB quidem maioris inaqualitatis, CD vero minoris, dico exhiberi non poſſe, an, aut quoties vna alterius ſit multiplicata.



Si enim fieri poſſit, ſit AB ratio, v.g. duplicata rationis CD; & ponantur in hyperbola rectæ EF, GH, proportionales rectis A, B. fiatque, vt C ad D, ita GH ad IK: erit igitur ratio EF ad GH, duplicata rationis GH ad IK: ponatur autem inter EF & GH, media proportionalis LM: erit illa, vel eadem cum IK, vel cadet vltra, aut citra IK. ſi eadem ſit cum IK, proportionales igitur ſunt EF, IK, GH, & ratio EF ad GH, duplicata rationis IK ad GH; ſed ex hypotheſi, ratio EF ad GH duplicata eſt rationis GH ad IK, ratio igitur IK ad GH, æqualis eſt rationi GH ad IK, quod impoſſibile: iam vero, cadat LM, inter IK & GH: quoniam igitur EF, LM, GH, continuè ſunt proportionales, erit ratio EF ad GH, duplicata rationis LM ad GH: ſed ratio EF ad GH, duplicata ponitur rationis GH ad IK. ratio igitur LM ad GH, æqualis eſt rationi GH ad IK; igitur GH minima, eſt ad IK maximam, vt maior LM, eſt ad eandem minimam GH: quod impoſſibile: ſimiliter oſtendetur ſequi impoſſibile, ſi LM, cadat inter IK & EF: igitur ratio AB, non poteſt eſſe duplicata rationis CD: ſed neque triplicata, aut quadruplicata &c. exhiberi igitur non poteſt &c. quod erat demonſtrandum.

Hinc ſequitur 1. rationem maioris inæqualitatis, quoad multiplicationem conferri aut comparari non poſſe, cum ratione minoris inæqualitatis: quantumcunque enim ratio minoris inæqualitatis, in ſe ipſam multiplicetur, nunquam producet rationem maioris inæqualitatis, ſed minoris ſemper, vt oſtenſum propoſ. 5. partis 3. huius; imo quò ſæpius ratio minoris inæqualitatis in ſe ipſam multiplicatur, tantò minor erit ratio producta.

A C E
B D F

Sequitur 2. aliud eſſe, rationem v.g. AB, aliquoties multiplicatam eſſe rationis CD, puta duplicatam, triplicatam &c. aliud, rationem AB multiplicari per rationem CD: prius enim ſignificat, rationem CD, aliquoties v.g. bis, ter in ſe ductam, producere rationem AB; vel rationem AB, aliquoties in ſe continere per multiplicationem, rationem CD, poſterius verò ſignificat, rationem aliquam tertiam oriri, v.g. EF, vel ex multiplicatione denominatorum rationum AB, CD, vel ex multiplicatione terminorũ, puta A in C producat E, B in D producat F.

PARS QVINTA.

Vindicatur à Cenſura Propoſ.75.oper. Geom. de multiplicatione rationum.

A	C
B	D
E	

PRoponit Auctor oper.Geom.lib.8.propoſ.75. Theorema huiuſmodi: *data ſint rationes A B, C D; fiatque vt C ad D, ita B ad E, dico rationem A B, ductam in rationem C D, producere rationem A E:*

Propoſitionem hanc ita cenſet auctor recentior l.5. Elem. parte 3. pag. 171. *hac operatio eſt Gregorij à S. Vincentio, l.8. prop.75. ſed nec eam ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat; hunc igitur in modum demonſtrabitur.*

Demonſtratio recentioris auctoris: *Ratio A ad E, producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad E, vt patebit ex demonſtratione n. 12, ab his independente: ſed rationes A ad B, & B ad E, ſunt rationes A ad B, & C ad D, per conſtr. ergo ratio A ad E, eſt ea, quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D: quod erat demonſtrandum.*

Demonſtratio P. Gregorij: *Rationes A B, B E, componunt rationem A ad E. ſed ratio B E, eſt ratio C D, per conſtr. ergo ratio A B, cum ratione C D, componunt rationem A ad E. ergo ratio A B, ducta in rationem C D, producit rationem A ad E. quod erat demonſtrandum.*

Demonſtratio hæc P. Gregorij, ab alia, in nullo differt, quam quod in illa aſſumatur tanquam principium à totâ Geometriâ hactenus admiſſum, rationem A ad E, componi ex rationibus A ad B, & B ad E: in hac vero idem aſſumatur, non tanquam principium, ſed vt Theorema poſtea demonſtrandum. idcirco igitur P. Gregorius operationem ſuam non demonſtrat, quod in demonſtratione aſſumat compoſitionem rationum, vt principium, admiſſum quidem ab omnibus, ſed tamen non demonſtratũ. ſed non aduertit auctor ille, aliud eſſe operationẽ aliquã non demonſtrare, aliud eandem demonſtrare aſſumpto principio, à totâ Geometriâ admiſſo, licet id demonſtratum non ſit. quis vnquã adeo cæcutiuit Geometra, vt neget, Apollonium magnum illum Geometram, Theoremata ſua & problemata conica demonſtraſſe? & tamen hic, rationum compoſitionem quaſi ſibi propriam & ſingularem, ita demonſtrationibus ſuis adhibet, vt vix vnam ſit reperire, quæ abſque illa perficiatur: igitur P. Gregorius operationem ſuam idcirco ſi non demonſtret, quia in ea rationum compoſitionem vt principium aſſumat, neque Apollonius, cui eadem cauſa eſt, propoſitiones ſuas demonſtrauit: quod nemo dixerit Geometra.

Sed ad hominem, vt aiunt, iam formo argumentum: idcirco P. Gregorius operationem ſuam non demonſtrat, quia in ea aſſumit, compoſitionem rationum, vt principium, admiſſum quidem ab omnibus, ſed tamen non demonſtratum: igitur neque auctor ille compoſitionem rationum demonſtrat, cum illius demonſtratio, dependeat ab alio principio, quod nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrarat, & vniuerſaliter ſumptum non admittitur ab omnibus, ſequelam, ex ipſa illius demonſtratione ſic probo:

Data

A X
B
C
D

Datæ ſint magnitudines quæcunque & quotcunque A, B, C, D: oſtendendum eſt rationem A ad D, componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D. fiat vt B ad C, ita X ad B. eruntque rationes A ad B, B ad C, reductæ ad rationes A ad B, & X ad B, habentes commune conſequens B: ac proinde rationum denominatores ſunt A & X. &c.

Aſſumitur in hac demonſtratione, rationum A ad B, & X ad B commune habentium conſequens B, denominatores eſſe A & X. id vero vel aſſumitur vt principium ſeu axioma non demonſtratum, vel vt Theorema à P. Gregorio demonſtratum (nemo enim id ante ipſum demonſtrauit) ſi prius, igitur Auctor ille, compoſitionem rationum non demõſtrat, quia in demonſtratione ſuâ aſſumit aliquid non demonſtratum. ſi poſterius, idem rurſus ſequitur: nam rationum commune habentium conſequens, denominatores eſſe, antecedentes terminos, demonſtratur à P. Gregorio, dependenter ab hoc principio (ſine quo demonſtrari fortaſſis non poteſt) *quantitas rationis ſeu denominator, ductus in conſequentem terminum rationis, producit antecedentem*: quod nec ipſe, nec alius quiſquam tunc demonſtrarat, & vniuerſaliter ab omnibus non admittitur; ergo rurſus auctor ille compoſitionem rationum non demonſtrat, cum illius demõſtratio dependeat, à principio non demonſtrato. Aut igitur P. Gregorius ſuam operationem demonſtrat, aut neque Apollonius ſuas propoſitiones, neque recentior ille compoſitionem rationum demonſtrauit.

Deinde, quod Auctor idem dicat, compoſitionem rationum à nullo ante ſe demonſtratam eſſe, plane à vero alienum eſt. demonſtrauit enim illam in Euclide ſuo Logiſtico, Nobilis Dominus Franciſcus de Nonancourt, cuius demonſtrationem, ab auctore illo, & lectam eſſe, & apud alios laudatam, certus ſcio: quod miror ab ipſo diſſimulari.

CAPVT DECIMVMSEXTVM.

De rationibus proportionalibus.

α	β	γ	δ
A	C	E	G
B	D	F	H

RAtiones eas proportionales voco, *quarum denominatores ſunt proportionales.* ſint quatuor rationes AB, CD, EF, GH quarum denominatores ſint α, β, γ, δ. ſi quantitates, α, β, γ, δ fuerint continuè proportionales, erunt & rationes AB, CD, EF, GH continuè proportionales: ſi verò fuerit, vt α ad β, ita γ ad δ, erit AB ratio ad rationem CD, vt ratio EF, ad rationem GH: ratio definitionis clara eſt: cum enim vt dictum cap. 5. & 6. huius, denominatores, in re idem ſint cum rationibus, eadem proportio eſt inter rationes, quæ reperitur inter denominatores. hinc omnes proprietates, quæ ab Euclide demonſtrantur conuenire quantitatibus proportionalibus, ad amuſſim conueniunt rationibus proportionalibus: quod paucis ex Auctore demonſtro.

Sit AB ratio ad rationem CD, vt ratio EF, eſt ad rationem GH. dico rationem AB, ductam in rationem GH, æquari rationi CD, ductæ in EF.

I	K		
A	C	E	G
B	D	F	H

Fiat vt G ad H, ſic B ad I. & vt E ad F, ſic D ad K; erit ratio AB ad rationem HG, vt A ad I; & ratio CD ad rationem FE, vt C ad K, per ea

quæ

quæ demonſtrata ſunt cap.6. huius. rurſum quia eſt vt G ad H, ita B ad I, erit ratio A I, orta ex ratione A B, ducta in rationem G H per 3. pr. ca. 15. huius. ſimiliter, quia eſt vt E ad F, ita D ad K ratio C ad K, orta eſt ex ratione C D, ducta in rationem E F. rurſum, quia ex hypotheſi ratio A B eſt ad rationem C D, vt ratio E F ad rationem G H, per 60. lib. de proport. ratio A B, eſt ad rationem H G, vt ratio C D, eſt ad rationem F E: ſed A B ratio, eſt ad rationem H G, vt A ad I; & ratio C D, eſt ad rationem F E, vt C ad K, igitur vt A eſt ad I, ita C ad K. ſed ratio A I, orta eſt ex ductu rationis A B, in rationem G H, & C K ratio, orta ex ductu rationis C D in rationem E F, ratio igitur A B ducta in rationem G H, æquatur rationi C D ductæ in rationem E F: eſt Auctoris 86. lib. 8.

Similiter demonſtratur, ſi fuerint tres rationes continuè proportionales, quod prima, ducta in tertiam, æquetur mediæ, ductæ in ſe.

A	C	E	G
B	D	F	H

Sint rurſum A B, C D, rationes, proportionales rationibus E F, G H: ſitque A B ratio omnium maxima: dico aggregatum ex rationibus A B, G H, maius eſſe aggregato, ex rationibus C D, E F. patet: cum enim rationes illæ proportionales ſint, denominatores quoque illarum proportionales erunt: & quia ratio A B ponitur maxima, & conſequenter ratio G H minima, denominator quoque rationis A B, maximus erit, & rationis G H, minimus: quare iuxta 25. v. Eucl. ſumma denominatorum rationum A B, G H, maior eſt ſummâ denominatorum rationum C D, E F: igitur & ſumma rationum A B, G H, maior eſt ſummâ rationum C D, E F.

Similiter oſtendetur, quod ſi tres rationes fuerint continuè proportionales, ſummam ex maxima & minima, maiorem eſſe duplâ reliquæ.

Propoſitionem 86, quam paulo ante ex Auctore attuli: ita Cenſet Cenſor A. A. *Si P. Gregorius*, inquit, *rectè intelligeret, quid ſit ducere rationem in rationem, vera eſſet eius propoſitio, cum ex proprietate quatuor quantitatum proportionalium, factum ſub extremis logarithmis, æquetur facto ſub mediis, &c. ſed cum putet in rationum compoſitione, fieri veram rationum multiplicationem, voluit hanc proprietatem ipſis tribuere, quæ nullatenus eis conuenit. ſi enim rationes A B plus G H, æquales ſint rationibus C D plus E F, tunc ſolummodo ſumma priorum, æquabitur ſummæ poſteriorum; non autem eorum productum: ergo tunc rationes non poterunt eſſe proportionales; cum ex Euclide, ſumma extremorum proportionalium, maior ſit ſummâ mediarum.*

At ſi Cenſor, aut ea quæ ſcribit ipſe, aut rationum naturam rectè intelligeret, diſtingueret vtique rationum additionem, ab earundem multiplicatione, videretque, dum de quatuor rationibus proportionalibus dicitur, *primam ductam in quartam, idem producere, quod ſecunda in tertiam*, agi de vera rationum multiplicatione; dum autem de iiſdem dicitur, *aggregatum maximæ rationis & minimæ, maius eſſe aggregato reliquarum*, agi de vera rationum additione, diſtincta ab earundem multiplicatione: atque vtramque hanc proprietatem, tam rationibus proportionalibus, quâ Euclideis quantitatibus conuenire.

Quâ methodo, datis duabus rationibus, tertia aut media inueniatur proportionalis, breuiter ex Auctore, doctrinæ ergo, non pigebit hic adferre.

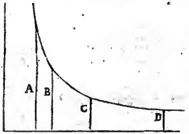
A C
B D
F E

Sint duæ rationes A B, C D: oportet exhibere tertiam proportionalem. fiat vt C ad D, ita D ad E; & vt C ad E, ita A ad F, dico rationem B F, eſſe illam, quæ quæritur: patet: cum enim rationes A F, CE, ſimiles ſint, per 61. lib. de proport. ratio A B eſt ad rationem C D, vt ratio D E, hoc eſt C D, ad rationem B F. igitur &c.

A C
B D
E F G
H

Sint rurſum A B, C D, rationes quæcunque: oportet mediam proportionalem aſſignare. fiat vt A ad B, ſic E ad F: & vt C ad D, ſic F ad G: tum inter E, G, media inueniatur proportionalis H. dico rationem E H, eſſe illã, quæ quæritur. ratio E F, ducta in rationem F G, producit rationem E G: ſimiliter ratio E H, ducta in rationem H G, producit rationem E G: ſed H G ratio, ex conſtr. eſt eadem cum ratione E H, igitur E H in ſe ipſam ducta, producit rationem E G, quæ oritur ex ductu rationis E F in F G, hoc eſt ex conſtr. A B in C D. igitur E H ratio, media proportionalis eſt, inter rationes A B, C D.

Porro notatu dignum eſt, quam diuerſas affectiones inhyperbola cauſent, tam ſimplices quantitates, quam rationes continuè proportionales.



1. Sint in hyperbola alteri aſymptotorum paralelæ, rectæ A B C D, continuè proportionales. dico ſuperficies hyperbolicas A B, B C, C D, eſſe omnes æquales. eſt conuerſa, propoſ. 130. lib. de hyperbola.

2. Si rationes A ad D, B ad D, C ad D, fuerint continuè proportionales, dico ſuperficies hyperbolicas, A D, BD, CD, eſſe arithmeticè proportionales: cum enim rationes illæ ſint continuè proportionales, & commune habeant conſequens D, erunt antecedentes illarum termini, A, B, C, in continua analogia: adeoque ſuperficies A B, (exceſſus nimirum quo ſuperficies A D excedit B D,) æqualis ſuperficiei B C, (exceſſui quo B D ſuperat C D) igitur ſuperficies illæ arithmeticè ſunt proportionales.

3. Si ratio A D, toties multiplicata ſit rationis B D, quoties ratio BD, eſt multiplicata rationis C D; dico ſuperficies hyperbolicas A D, B D, C D continuè eſſe proportionales geometricè. patet: nam ſuperficies A D, tam multiplex eſt ſuperficiei B D, quam ratio A D, multiplicata eſt rationis B D; & ſuperficies B D, tam multiplex ſuperficiei C D, quã ratio B D, multiplicata eſt rationis C D: ſed ex hypotheſi, quam multiplicata eſt ratio A D rationis B D, tam multiplicata eſt ratio B D rationis C D, igitur quam multiplex eſt ſuperficies A D, ſuperficiei BD; tam hæc ipſa ſuperficies B D, multiplex eſt ſuperficiei C D; igitur tres illæ ſuperficies continuè ſunt proportionales geometricè.

Hinc demonſtratiuè patet, quoties tres ſunt rationes, quibus hæc proprietas competit, vt quoties prima multiplicata eſt ſecundæ, toties ſecunda ſit multiplicata tertiæ; nunquam illas rationes eſſe continuè proportionales: nam rationes illæ translatæ ad hyperbolam, intercipiunt ſuperficies

perficies continuè proportionales geometricè: rationes vero continuè proportionales; dant in hyperbola ſuperficies arithmeticè tantum proportionales.

Oſtenderat idem, binis demonſtrationibus P. Alphonſus de Saraſſa, in confirmationibus quadraturæ coroll. 11. cum eiuſmodi mox à nonnullo tulit Cenſuram. *negat P. Saraſſa, ſi ratio A F, ſit duplicata rationis C H, & hac duplicata rationis D I, eas eſſe continuè proportionales: in quo quidem & cum aſſerit, & cum demonſtrat vehementer fallitur; ſunt enim proportionales in ſenſu multiplicationis: quod ſic oſtendo. ex hypotheſi, ratio A F continet rationem C H bis, & hac continet bis rationem D I, in ſenſu nempe multiplicationis, ergo in eodem ſenſu, ita ſe habet ratio A F ad rationem C H, vt hac ſe habet ad rationem D I. igitur in ſenſu dicto rationes illa proportionales ſunt: &c. gemina itaque demonſtratione ſuâ, nil aliud effecit P. Saraſſa, quam rationes illas non eſſe proportionales in ſenſu additionis.*

A	C	D
F	H	I

Tota hæc reſponſio adeo friuola eſt, vt refelli vix mereatur; id enim quod ſupponitur, adfert pro quæſito, aſſertionem pro demonſtratione; præterquam quod ageometricæ ſint locutiones hæ: *proportionales in ſenſu multiplicationis, proportionales in ſenſu additionis*, quas Geometria hactenus non audiuit. ſupponitur à P. Saraſſa, rationem A F, tam eſſe multiplicatam rationis C H, quam hæc eſt multiplicata rationis D I; ſiue ſi ita loqui fas ſit, rationem A F in ſenſu multiplicationis, ita ſe habere ad rationem C H, ſicuti hæc ſe habet ad rationem D I, in ſenſu vtique multiplicationis: atque hoc ſuppoſito, quærebatur, an inde ſequeretur, rationes illas eſſe continuè proportionales: quærebatur autem non de nomine, an nimirum ob iſtam æquimultiplicationem rationum, nomen proportionalium poſſet aliquo ſenſu illis attribui, ſed de re quærebatur; an nimirum rationes illæ verè eſſent continuè proportionales, hoc eſt, an illarũ quantitates continuã ſeruarent analogiam. negabat id P. Saraſſa, & duplici demonſtrabat viâ. mox alter, *P. Saraſſa*, inquit, *& cum id aſſerit, & cum demonſtrat vehementer fallitur*. quâde causâ? *ſunt enim continuè proportionales in ſenſu multiplicationis, nam ratio A F in ſenſu multiplicationis, ſic ſe habet ad rationem C H, ſicut hac ad rationem D I, in ſenſu vtique multiplicationis*, at hoc non quæritur, ſuppoſitum eſt: quæſitum à ſuppoſito differt; illa ſic ſe habentia ſecundum multiplicationem, hypotheſis eſt: quæritur autem, an ex ea ſequatur, rationum illarum quantitates in continua eſſe analogia? rurſum idem reponitur, *ſunt proportionales in ſenſu multiplicationis* &c. quid facias reſponſioni tam ad rem non pertinenti? videte modo concluſionem ex eiuſmodi præmiſſis deductam: *geminâ itaque demonſtratione ſuâ, nil aliud effecis P. Saraſſa, quam rationes A F, C H, D I, non eſſe proportionales in ſenſu additionis*, hoc eſt vt Geometræ loquuntur, ſecundum quantitates ſuas. atque de hoc ſolo tota erat quæſtio, aliud enim vtrimque ſupponebatur, rectè igitur P. Saraſſa & aſſeruit & demonſtrauit id, quod erat in quæſtione: quî igitur in eo quod rectè ab illo factum dicitur, vehementer falli aſſeritur?

CAPVT DECIMVMSEPTIMVM.

Spongia Centuriæ Cenſurarum, quas in Auctoris librum 8. de proportional. conſcripſit vir Clariſſ. A. A.

EX falſa opinione naſcentia, vbi deſinant non habent; nullus enim terminus falſo eſt: via eunti, aliquid extremum eſt; error eſt immenſus, quod quam verum ſit, palam faciunt Cenſoris illæ de rationibus nouitates, & ex illis orta Cenſurarum centuria: is enim, vbi à trita & primorum Geometrarum firmata veſtigiis ſemita, primum deflexit, in immenſum errores circumduxit. Rationum naturam à multiplicatione omnino dependere, atque in illa ſitam eſſe, cæterorum errorum omnium fons eſt & origo. Hinc in denominatorum locum, logarithmos & ſpatia intrudit hyperbolica: rationem æqualitatis, ad punctum & nihilum redigit; rationum multiplicationem, cum additione confundit; librum pæne integrum Auctoris de proport. falſitatis accuſat: Euclidem ipſum erroris arguit; omnem denique quæ de rationibus eſt geometriam, euertit. idque eâ præfidentiâ, vt cum ne vnum quidem ex prædictis omnibus, probabili vel in ſpeciem ratione, nædum geometricâ demonſtratione adſtruat, figmenta illa ſua, certam veluti regulam & amuſſim proponat, ad quam omnis de rationibus doctrina dirigi & explorari debeat. quæ res quam inſolens & noua, tam ab omni veritate aliena eſt: quod in præcedentibus euidenter demonſtratum cum ſit, ea modo excutienda reſtant, quæ ex principiis huiuſmodi deducta, centuriam ſtatuunt Cenſuratum.

Atque vniuerſim quidem ex 172 propoſitionibus, quibus lib. 8 Auctoris conſtat, vix 70. veras eſſe pronunciat: reliquas omnes, aut apertæ falſitatis, aut malæ conſtructionis, aut alterius erroris accuſat: porro quã vanæ & nullæ eæ ſint cenſuræ, ex ipſis quibus deducuntur principiis omnino patet; quæ falſitatis manifeſtæ conuicta cum ſint, falſas quoque cenſuras eas eſſe, neceſſe eſt; quod ipſum lubet ſingillatim oſtendere.

Primùm, ex eo quod logarithmos & ſpatia hyperbolica, velit eſſe rationum quantitates, locumque denominatorum obtinere, falſam aſſerit propoſ. 2. l. 8. & ex hac, propoſitiones ſequentes 3.4 5.6.13.37.43.54.55.56.99.101.103.113.126.161.162.163. at cum cap. 9. dilucidè oſtenderim, neque logarithmos, neque ſpatia hyperbolica, eſſe aut eſſe poſſe rationum quantitates, ſequitur cenſuras illas nullas eſſe.

Secundùm: ex eo quod ratio æqualitatis, iuxta illum ſit vel punctum, vel nihil, adeoque alteri rationi addita, neque faciat quid maius, neque hanc immuret, ſequentes propoſitiones falſitatis arguit 7.9.10.11.13.14.15.16.19.21.26.33.34.38.39.50.51.53.58.59.60 61.62.63.67. 71.84. 121.138.145.164.165. verum cum principium hoc falſiſſimum ſit, vt oſtẽdi cap. 10. palam eſt cenſuras eas omnes quoque falſas eſſe.

Tertiùm, ex eo quod ratio minoris inæqualitatis, ſecundum illum, quoad quantitatem conferri non poſſit cum ratione maioris inæqualitatis, aut contra, erroris condemnat propoſ. ſequentes 18,32.23.41.92.94.131. atque hoc principium, erroneum cum ſit, vt oſtendi cap. 12. & alibi vanas quoque & erroneas eſſe cenſuras inde ductas, neceſſe eſt.

Quartùm;

Quartùm; ex eo quod rationum compoſitio, iuxta ipſum nil aliud ſit, quam rationum vnio, quæ multiplicationem excludat, falſitatis arguit propoſitiones. 75.76.77.80.82.92.93.120. ſed & illud principium falſum eſſe cum oſtenderim cap. 15. falſæ quoque eæ ſunt cenſuræ.

Quintùm: ex eo quod rationes velit ſequi naturam & proportiones ſpatiorum hyperbolicorũ, partim ignotas, partim inſolubiles aſſerit propoſitiones ſequentes: 24.25.27.28.29.30.31.68.69.70.102.117.122.123.141. 142.143.144.152. denique & hoc principium falſum cum ſit, vt ſæpius oſtendi, veritatem ſuam & legitimam quam Auctor dedit ſolutionem obtinent.

Ex iiſdem principiis, quibus vſus Cenſor A A, Euthymius Grammaticus damnauit propoſitiones ſequentes: 2. lib. 8. 3.4.5.6.7.8.9. 10.11.12.13. 14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25. & ſic conſequẽter vſque ad 81. incluſiue: quibus alias addit vſque ad 117. ſed cum cenſura illa tota falſis ipſius principiis innitatur, vt ante oſtenſum, nulla eſt; de propoſitionibus quas in lib. 10. Auctoris damnat, ſuo loco videbimus.

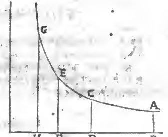
Cæterum animos candoremque Cenſoris laudo; & quod tantum laboris ac moleſtiæ rebus geometricis Auctoris examinandis impenderit, gratias ago; quod vero id egerit infelicius, vehementer doleo. porro ne tantis ingratus ſim officiis, Cenſurarum Centuriæ, quindenam repono; tot nimirum, quot Theorematis ſuum de rationibus tractatum complexus eſt: atqui non nudis & gratuitis conſtabunt illæ aſſertionibus, ſed appoſitis ſingulas firmabo demonſtrationibus, aut locum indicabo, vnde peti illæ poſſint.

CAPVT DECIMVMOCTAVVM.

Cenſura quindecim Theorematum, quibus vir Clariſſ. A A, quæcunque tum Euclides in v. Elemento de rationibus ſimplicibus, tum alij de ſimplicibus & compoſitis, nouâ methodo ſe putat demonſtrare.

THEOREMA. I.

SI in hyperbola ducantur plures rectæ vni aſymptotorum paralelæ, ſpatia hyperbolica, quæ includuntur à rectis, repræſentant rationes inter illas rectas. v. g. ſpatium A B C D, quantitas eſt rationis A B ad C D, & ſpatium C D E F, quantitas rationis C D ad E F &c.



Cenſura.

F*Alſa eſt propoſitio: demonſtrat enim Auctor oper. Geom. ſpatium AGDB, tam multiplex eſſe ſpatij C E F D, quam multiplicata eſt ratio A B ad C D, rationis C D ad E F &c. l. 6. prop. 129. oſtenſum inſuper eſt c. 10.* huius,

huius, ſpatia hyperbolica, nec eſſe, neque eſſe poſſe quantitates rationum inter lineas ſpatia includentes: igitur neque ſpatia repræſentant rationes illas, neque repræſentare poſſunt, ſecundum quantitatem.

Hinc quoque falſum eſt problema quod Theoremati primo ſubiungitur: cum illius ſolutio, ab hoc dependeat: falſum item coroll. 2 & 3, eidem innixum.

THEOREMA II.

Ratio æqualitatis nullam habet quantitatem à qua repræſentetur. ſit ratio æqualitatis A ad A; ſi per problema præcedens, eius quantitatem quæramus, inueniemus nullam eſſe; cum inter duas lineas æquales, ſeu potius vnicam, nullum ſpatium hyperbolicum intercipiatur; ergo rationis æqualitatis non datur quantitas.

Aliter: ſit aliqua quantitas, quæ rationem æqualitatis repręſentet, v. g. Z. cum quâlibet datâ ratione maioris inæqualitatis, poſſit dari minor & minor in infinitum, tandem deuenietur ad quantitatem, datâ Z minorē; ac proinde ratio æqualitatis, erit maior ratione maioris inæqualitatis. quod abſurdum.

Aliter: ſit rurſus Z quantitas rationis æqualitatis; ergo duæ rationes æqualitatis A ad A; plus A ad A; erunt duplæ ſimplicis rationis A ad A; quod æque falſum; cum quotcunque rationes æqualitatis compoſitæ, ſint tantum æquales vnicæ rationi.

Cenſura.

Falſa eſt propoſitio, & demonſtrationes omnes tres erroneæ. demonſtratum eſt enim, cap. 10. huius, rationem æqualitatis, veram eſſe quantitatem, & habere denominatorem à qua repræſentetur.

Demonſtrationis primæ error, patet ex cap. 9. huius, in quo demonſtratum eſt, ſpatia hyperbolica, non eſſe quantitates rationum, adeoque nec illas ſecundum ſe repræſentare poſſe.

Demonſtrationem ſecundam falſitatis conuici cap. 10. part. 2. ſub finem.

Tertiam item demonſtrationem falſam oſtendi cap. 10. part. 1. num. 2.

Falſum quoque eſt coroll. 1 & 2, cum ex Theor. deducantur, vt ſingillatim oſtēdi cap. 10. huius p. 1.

THEOREMA III.

A
B
C
D

Ratio inter duos terminos, componitur ex omnibus rationibus inter terminos, qui medij ſumuntur.

Sit ratio A ad D. dico eam componi, ex rationibus A ad B plus B ad C, plus C ad D, ſeu eſſe æqualem omnibus rationibus.

Fiat enim in hyperbola &c.

Cenſura.

Vera eſt aſſertio in abſtracto propoſita; nimirum rationem A ad D, componi ex omnibus rationibus inter terminos qui medij ſumuntur: falſum autem eſt, rationem A ad D, componi ex ratione A ad B, plus B ad C, plus C ad D: nam τὸ plus

additionem

additionem hic ſonat,compoſitio autem rationum,fit per veram multiplicationem rationum mediarum,& non per earundem additionem; vt demonſtraui cap.15. vnde & falſum eſt,rationem A ad D, eſſe æqualem omnibus rationibus A ad B plus B ad C,plus C ad D:aliud enim eſt, rationem A ad D componi ex rationibus intermediis,aliud rationem A ad D illis ſimulſumptis eſſe æqualem.

Demonſtratio quoque Theorematis plane erronea eſt & falſa,cum aſſumat rationes linearum ſpatia hyperbolica includentium,eſſe inter ſe,vt ſpatia; ſiue illas per hac repræſentari,quo nihil minus verum eſt.

Coroll. 1. falſum eſt,& nihil præter aſſertionem Theor.continet:falſum quoque eſt Coroll. 2.cum eundem errorem Theor.contineat.

THEOREMA IV.

SI quatuor magnitudines ſint proportionales,inuerſæ erunt proportionales.

$$\frac{A}{B} \qquad \frac{C}{D}$$

Sit A ad B,vt C ad D,dico inuertendo eſſe D ad C vt B ad A.

Cum enim eadem ſit quantitas rationis,inter A ad B,& B ad A,& pariter inter C ad D,& D ad C,erunt igitur rationes D ad C, & B ad A æquales.

Cenſura.

VEra eſt aſſertio,vtpote ex Euclide deſumpta, at demonſtratio prorſus eſt erronea:cui enim vnquam in mentem venit dicere,eandem eſſe quantitatem inter A & B,quæ eſt inter B & A;hoc enim nil aliud ſignificat,quam rationem A ad B eandem eſſe cum ratione B ad A, prout expreſſè idem docet 2.coroll. Theor. primi.abſurditatem huiuſce aſſumpti,vid.cap.10. huius, parte 2. ad tertium argumentum.

THEOREMA V.

SI quatuor magnitudines ſint proportionales, viciſſim erunt proportionales. ſit A ad B,vt C ad D;dico permutando eſſe A ad C,vt B ad D.

$$\frac{A}{C} \qquad \frac{B}{D}$$

Ratio enim A ad C,æqualis eſt rationibus A ad B, plus B ad C; ratio quoque B ad D,æqualis eſt rationibus B ad C,plus C ad D; ſed ex hypotheſi,æquales ſunt A ad B & C ad D, quibus eadem additur vel ſubtrahitur ratio B ad C,ergo tota,vel reſidua ſunt æqualia;ſeu rationes A ad C, B ad D.

Aliter. iungatur vtrique eadem ratio B ad C, vnde æqualitas non immutatur;erit hinc A ad B plus B ad C,(hoc eſt A ad C) inde vero B ad C plus C ad D(hoc eſt ratio B ad D)ergo æquales ſunt rationes A ad C, & B ad D.

Cenſura.

ASſertio vera eſt,at demonſtratio erronea.falſum enim eſt, quod ratio A ad C, ſit æqualis rationi A ad B plus B ad C; verum autem eſt quod ex illarum rationum multiplicatione componatur,vt demonſtratum eſt cap.15.huius.

Falſa

Falſa quoque eſt demonſtratio ſecunda; nam ratio B C, addita rationi A B, vel C D, hanc immutat: vt demonſtraui cap.10.part.1.

THEOREMA VI.

A B
C D

RAtio compoſita ex rationibus reciprocis, facit rationem æqualitatis.

Sint rationes æquales A ad B, & C ad D; & fiat ratio compoſita ex A ad B plus D ad C; dico eam eſſe æqualem rationi æqualitatis.

Cum enim ſit inuertendo D ad C, vt B ad A, erit A ad B plus D ad C, vt A ad B plus B ad A; id eſt vt A ad A.

Cenſura.

ASſertio (ſi per compoſitionem intelligatur vera rationum multiplicatio) vera eſt, & deſumpta ex lib.8. Auctoris oper. Geom propoſ.76. quæ ita proponitur; data ſit quæuis ratio A ad B: dico rationem A B, ductam in rationem B A, producere rationem æqualitatis.

Si vero per compoſitionem intelligatur rationum additio, vt fit in caſu Theorematis, plane falſa eſt: nam ratio A B, addita rationi B A, producit rationem inæqualitatis: vt demonſtratum eſt cap.10.p.1.

THEOREMA VII.

IN ratione cõpoſita ex duabus rationibus, ratio primi termini ad quartum, plus ratione tertij ad ſecundum, æqualis eſt rationi primi termini ad ſecundum, plus ratione tertij ad quartum.

A B
C D

Sint rationes A ad B plus C ad D, dico iis æquales eſſe rationes A ad D plus C ad B. nam ratio A ad D, æqualis eſt rationibus A ad B plus B ad D; & ratio C ad B, æqualis eſt rationibus C ad D plus D ad B; ergo rationes A ad D plus C ad B, æquales ſunt rationibus A ad B plus B ad D, plus C ad D, plus D ad B: ſed rationes B ad D plus D ad B, faciunt rationem æqualitatis, quæ nihil immutat, ergo remanent æquales rationes A ad D plus C ad B, rationibus A ad B plus C ad D.

Cenſura.

E16. H28
12A C8
4 B D2

PRopoſitio hæc intellecta, prout illius Auctor intelligit, de compoſitione rationum, quæ fit per illarum additionem, falſa eſt vti & demonſtratio: nam ratio A B, addita rationi C D, non producit eandem ſummam, quam ratio A D, addita rationi C B; vt cuiuis vel leuiter in rationum materia verſato, primâ fronte apparet. fiat enim vt D ad C, ita B ad E, & aggregatum ex A & E ſit H; erit ratio H ad B, ſumma rationum A B, C D, ſibi inuicem additarum: vid. cap.14. huius part.2.

12A C8
2 D B4
K 1
L 13

Sint iam addendæ rationes A D, C B: fiat vt B ad C, ita D ad K, & aggregatum ex A & K ſit L; erit ratio L ad D, ſumma ex additione rationis A D, ad rationem C ad B: quæ planè à priori diuerſa eſt: propoſitio igitur in ſenſu additionis intellecta falſa eſt.

eſt. Intellecta vero in ſenſu multiplicationis (qualem non admittit ipſe) vera eſt; nam ratio A B ducta in rationem C D, producit idem quod ratio A D ducta in rationem C B.

Demonſtratio inſuper Theorematis, tot ſcatet vitiis, quot pene verba; cum ſingula pene aſſumpta falſa ſint, vt cuiuis examinanti ad oculum patet.

THEOREMA VIII.



SI ſint rationes A ad B plus C ad D, æquales rationi E ad F; erit quoque ratio A ad B, æqualis rationibus E ad F plus D ad C.

Auferatur enim vtrimque ratio C ad D; remanebit hinc ratio A ad B; vt autem ex alia parte auferatur, inuertenda eſt, hoc enim ſupra docuimus, vnde proueniet ratio E ad F plus D ad C.

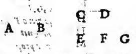
Aliter. addatur vtrimque ratio D ad C; erunt hinc rationes A ad B plus C ad D, plus D ad C; inde vero rationes E ad F plus D ad C, ſed rationes C ad D plus D ad C, faciunt rationem æqualitatis, vnde remanet ratio A ad B, æqualis rationibus E ad F plus D ad C.

Cenſura.

PRopoſitio eſt falſiſſima intellecta in ſenſu additionis prout Cenſor illam intelligit: cum enim ratio E ad F, ſit ſumma ex additione rationis A B ad rationem C D, patet illam maiorem eſſe tam ratione A B, quam C D: igitur ſumma ex ratione E F, addita rationi D C, multo maior eſt ratione A B.

In 2. etiam demonſtratione, falſum eſt aſſumptum, rationes C D plus D C, facere rationem æqualitatis; adeoque additas rationi A B, hanc non immutare, primam demonſtrationem fateorme non percipere.

THEOREMA IX.



SI vna ratio æqualis ſit duabus, notæ autem ſint duæ quæcunque, nota erit tertia.

Sit ratio A ad B, æqualis rationibus C ad D plus E ad F: & datæ ſint rationes A ad B, & E ad F; dico rationem C D, datam eſſe.

Fiat enim vt A ad B, ſic E ad G; erit ratio C ad D, æqualis rationi F ad G, quæ data eſt, cum ipſius dentur termini. cum enim rationes E ad F plus F ad G, ſint æquales rationi E ad G, hoc eſt A ad B, cui æquales quoque ſunt rationes E ad F plus C ad D; erunt rationes C ad D, & F ad G, inter ſe æquales.

Cenſura.

PRopoſitio vera eſt, ſed demonſtratio vitioſa. falſum eſt enim, quod ratio E G, ſit æqualis rationi E F plus F G; hoc eſt prout ipſe intelligit, rationi E F, additæ rationi F G; eſt autem ratio E G compoſita ex ratione E F ducta in rationem F G, vt demonſtratum capite 5. huius, quæ duo ſpecie differunt.

L THEO-

THEOREMA X.

A	C	E
B	D	F

SInt duæ magnitudines quæuis, A & B, quarum ſumantur æquemultiplicia C & D, vel æqueportiones E & F: dico eſſe A ad B, vt C ad D; & A ad B, vt E ad F.

Cenſura.

PRopoſitio vera eſt, & eadem cum 15 Euclidis 5. ſed nullius eſt momenti, vti & quatuor corollaria ſequentia, vel ipſis pueris nota.

THEOREMA XI.

SI ſint quotcunque ordines quatuor magnitudinum proportionalium, in eadem vel diuerſis rationibus; & ſit prima vnius ordinis, ad primam alterius, vt tertia ad tertiam; erunt omnes primæ ſimul, ad omnes ſecundas, vt omnes tertiæ, ad omnes quartas ſimul ſumptas.

A ad	B		C ad	D
E	F	vt	G	H
I	K		L	M

Sit enim A ad B. vt C ad D; E ad F vt G ad H; I ad K vt L ad M; ſit quoque A ad E, vt C ad G; & A ad I vt C ad L.

Dico omnes A, E, I, eſſe ad omnes B, F, K, ſicut omnes C, G, L, ſunt ad omnes D, H, M.

Cenſura.

A	B
E	F
I	K
C	D
G	H
L	M

PRopoſitio vera eſt, vtpote Archimedea: 2. de conoid. ſed obſcurè, & non rectè propoſita: quam ita ex Archimede corrige: eſto quædam magnitudines A, E, I, item aliæ totidem C, G, L; & A ad E, eandem habent rationem, quam B ad F. ipſa vero E ſit ad I, ſicut F ad ipſam K, referãtur autem A, E, I, magnitudines, ad alias magnitudines C, G, L, in quibuſcunque proportionibus; ipſa vero B, F, K, ad alias, videlicet D, H, M, eiſdem ordine eodem proportionibus; vt ſicut A ſe habet ad C, ita B ad D: & ſicut E ſe habet ad G, ita F ad H; & ſicut I ſe habet ad L, ita K ad M. dico omnes A, E, I, eſſe ad omnes B, F, K, ſicut omnes C, G, L, ad D, H, M, vide Eutochiũ in illam propoſ.

THEOREMA XII.

SI quatuor magnitudines ſint proportionales, earum differentiæ proportionales quoque erunt.

A	B
C	D

Sit A ad B, vt C ad D; ponatur autem A maior B, ac proinde C maior D. dico A minus B, eſſe ad C minus D, vt A ad C.

Cenſura.

PRopoſitio eſt Euclidis 19. l. 5. adeoque vera: corollarium quartum de octo argumentandi modis, partim ex Clauio deſumptum eſt, partim ſequelas ex Euclidæis deductas, adeoque nil noui continet: idem eſt de corollariis aliis, maximè 7.

THEO-

THEOREMA XIII.

SIt quæuis ratio A ad B: ſi vtrique termino addatur eadem quantitas, v.g. E, erit minor ratio A plus E, ad B plus E, quam A ad B: ſi ab vtroque dematur, erit maior ratio A minus E, ad B minus E, quam A ad B.

A E
B E

Cenſura.

VTraque aſſertio falſa eſt in rationibus minoris inæqualitatis: ſit enim ratio A ad B, 2 ad 4. quibus addantur æqualia C, D. 2 & 2. ratio A plus C, ad B plus D, eſt ratio 4 ad 6: ratio vero A ad B, eſt ratio 2 ad 4; ratio autem ſubſeſqui altera 4 ad 6, maior eſt ratione ſubduplâ 2 ad 4: ſi fiat enim vt 4 ad 6, ita 2 ad 3, erit ratio 2 ad 3, per 8. v. Euclid. maior ratione 2 ad 4: igitur & ratio 4 ad 6, maior eſt ratione 2 ad 4. falſa igitur eſt prima aſſertio.

A2 C2
B4 D2

Rurſum ratio A B, ſit 4 ad 8; à quibus æqualia auferantur C, D, 1 & 1; erit ratio A minus C, ad B minus D, ratio 3 ad 7: ratio vero A ad B 4 ad 8: fiat igitur vt 4 ad 8, ita 3 ad 6, erit ratio 3 ad 6, nimirum A ad B maior ratione 3 ad 7, hoc eſt ratione A minus C, ad B minus D. vtraque igitur aſſertio falſa eſt in rationibus minoris inæqualitatis.

A4 C1 | E3
B8 D1 | F7

THEOREMA XIV.

RAtiones commenſurabiles, ſeu multiplicatæ per numeros, ſunt inter ſe vt numeri à quibus denominantur.

Sint rationes centuplicata & duplicata, eiuſdem rationis; dico eſſe inter ſe vt 100 ad 2.

Ratio enim centuplicata, eſt æqualis centum rationibus ſimplicibus, ratio vero duplicata, duabus; ergo ſunt inter ſe vt centum rationes, ad duas ſeu 100 ad 2.

Cenſura.

PRopoſitio falſa eſt, & demonſtratio prorſus erronea: ſit enim 1. ratio A B maioris inæqualitatis; & in eadem continuata ſerie proportionalium, eſto C, centeſima prima: patet rationem A C, centuplicatam eſſe rationis A B. rurſus in eadem ſerie, eſto D tertia proportionalis; erit A D ratio, duplicata rationis A B: & D maior quam C, vnde & ratio A C quidem maior ratione A D, ſed ratio A C non erit ad rationem A D, vt 100 ad 2: ſed vt D, ad C. eſto 2. ratio A B minoris inæqualitatis; & in illa ſerie continuata, tertia proportionalis ſit D; centeſima prima vero ſit C: patet C maiorem eſſe quam ſit D; adeoque rationem A C minorem, quam ſit ratio A D: falſa igitur eſt propoſitio: demonſtratio porro eſt erronea, quia aſſumis rationem A C, æqualem eſſe centum rationibus ſimplicibus; A D vero duabus: quod falſum eſſe, alias ſæpius oſtendi: vtraque enim compoſita eſt ex ratione A B aliquoties in ſe ducta.

AB —— C
AB D

THEOREMA XV.

SI ſint duæ progreſſiones geometricæ, quæ terminum antecedentem vel conſequentem habeant communem, erit ratio ſecundorum terminorum à communi, dupla ſeu duplicata rationis primorum ; & ratio tertiorum, erit rationis eorundem primorum, tripla ſeu triplicata ; & ſic deinceps.

Cenſura.

PRopoſitio hæc deſumpta eſt ex Auctore oper. Geom. lib. 2. prop. 27. adeoque vera eſt: at malè confunditur ratio dupla cum duplicata, tripla cum triplicata ; quæ duæ, ſpecie differunt, ſicut additio in numeris à multiplicatione, vti oſtendi cap. 3. huius.

Monitum.

HÆc illa quindecim ſunt Theoremata, quibus vir Clariſſ. A A, non tantum ea, quæ Euclides in v. elemento de rationibus ſimplicibus, & alij de ſimplicibus & compoſitis propoſuerunt, nouâ methodo demonſtrare, ſed totam rationum naturam ex veriſſimis eductam principiis cōplecti ſe opinatus eſt; idque eâ breuitate & claritate, vt hunc ſuum tractatum, Geometriæ tyronibus, veluti nonum de rationibus elementum, proponi poſſe exiſtimarit. at quam hâc ſpe ſuâ & opinione falſus ſit, iudicent periti omnes, qui vel obiter figmenta hæc noua legerint: admonendus certè eſt illorum Auctor, vt melius alias res geometricas examinet, firmatiſque primorum geometrarum veſtigiis inſiſtens, & fallere & falli deſinat.

CAPVT DECIMVMNONVM.

Digreſſio ad Alexium Syluium.

LIbrum operis Geometrici octauum, quem de proportionalitatibus inſcripſit Auctor, quam infeliciter impugnarit Cenſor A A, abundè in præcedentibus, demonſtratum eſt. Altera modo excutienda eſt Cenſura, quam de eodem libro, tulit Alexius Syluius Polonus; is ſub initium examinis, quod Ephemeridibus ſuis annexuit, ita librum de proportionalitatibus cenſet.

Gratis autem hæc (nimirum proportionalitas) *conficta eſt: cum ſub vniuerſali nomine rationis ex rationibus compoſita, contineatur: quæ ſi alteri rationi ex rationibus compoſitæ ſimilis fuerit, fiet proportio rationum compoſitarum; licet vna ex pluribus rationibus componatur, quam altera. quomodo vero ex rationibus diſſimilibus argumentatio procedere poßit, prout in definitione proportionalitatum Auctor ſe facturum promiſit, (ratus propoſitiones aliquas fore, quæ paralogiſmos*

mos circa circuli quadraturam continerent)totum librum euolui; nihil tamen ſimile in eo reperi:donec tandem aduerterem,propoſ. 60, eandem eſſe quam iam à ſex annis inueni &c. quam rationem permutatam vocaui hoc ni fallor eſt ex rationibus diſſimilibus argumentari: &c. ex his apparet antiquis haud ignotam fuiſſe formam argumentandi à rationibus diſſimilibus;non proximis (quod fieri nequit,nec Auctor id vſpiam demonſtrauit)ſed remotis;quales ſunt, inter octo latera quatuor rectangulorum proportionalium;proxima vera ſimiles inter ipſamet quatuor rectangula &c.

Cenſura hæc,tria aſſerit:primum quidem, gratis confictam eſſe proportionalitatem, idque ideo, quia ſub vniuerſali nomine rationis ex rationibus compoſitæ contineatur: Alterum, Auctorem operis promiſiſſe edoċturum ſe quomodo argumentatio ex diſſimilibus rationibus poſſit procedere,nihil tamen ſimile ab eo factum eſſe. Tertium,antiquis haud ignotum fuiſſe argumentãdi modum à rationibus diſſimilibus, non proximis quidem,quia id fieri nequeat,neque Auctor id vſpiam præſtiterit, ſed remotis. videamus modo cuiuſmodi aſſerta illa ſint.

Aſſerit igitur 1. gratis confictam eſſe proportionalitatem,quia hæc ſub vniuerſali nomine rationis compoſitæ continetur. aſſertio hæc ex grauiſſimo Alexij errore nata eſt:exiſtimauit enim ille, quod rationes diſſimiles,aliter inter ſe conferri non poſſint, quam fiat in rationum compoſitione,atque inde illam gratis confictam eſſe ait, & ſub vniuerſali nomine rationis compoſitæ contineri,adeoque antiquis haud ignotam fuiſſe. verum ego vehementer miror, aſſertum illud Alexio in mentem potuiſſe venire;rerumque tam diuerſarum,quales ſunt proportionalitas, & ratio ex rationibus compoſita,non vidiſſe differentiam, quæ ex ipſis terminis tam obuia ſit & euidens. ratio enim ex rationibus compoſita, nil aliud eſt,quam ratio produc[illegible] ex multiplicatione aliquot rationum in inuicem:proportionalitas autem, eſt habitudo duarum proportionum ſecũdum quantitatem comparatarum:quæ habitudo (vti de rationibus conſtat ex cap.3.huius) plane independens eſt à multiplicatione, aut compoſitione; imo exiſteret, etiamſi omnis compoſitio & multiplicatio eſſet impoſſibilis:quid igitur,non dico cõmune, ſed vel in ſpeciem ſimile habet ratio compoſita,cum proportionalitate, vt hæc ſub illius nomine dicatur contineri?

Videte modo argumentum,quo aſſertum ſuum probat. *Si ratio,inquit, ex rationibus compoſita,ſimilis fuerit alteri rationi ex rationibus compoſita, exſurget proportio rationum compoſitarum;ergo proportionalitas continetur ſub vniuerſali nomine rationis compoſitæ.* quæ quæſo iſthæc eſt illatio, quæ ſequela?age duas aſſume rationes,de quibus nil aliud conſtet, quam quod rationes ex quibus componuntur, ſint diſſimiles; peto,an, & qualis inter ipſas rationes compoſitas ſit proportio? rurſum duas pro libitu ſtatue rationes inter ſe diſſimiles;peto, per compoſitionem exhiberi illarum proportionem?iterum duabus illis rationibus diſſimilibus,duas appone alias, tam interſe,quam prioribus diſſimiles;peto vtriuſque proportionis exhiberi rationem,idque per compoſitionem.hæc vbi tentaueris, ilicò videbis, quouſque rationum compoſitio ſe extendat, & vtrum diſſimiles rationes non aliter interſe conferri poſſint,quam per compoſitionem antiquis notam. non igitur gratis conficta eſt proportionalitas, neque vllo modo ſub vniuerſali rationis compoſitæ nomine continetur; ſed toto cælo ab illa differt,nec quidquam habet commune aut ſimile.

Aſſerit 2. promiſiſſe Auctorem operis, edocturum ſe, quomodo argumentatio ex diſſimilibus rationibus procedere poſſit; nihil tamen ſimile ab eo præſtitum.

Aſſertio hæc grauiſſimum rurſus continet errorem;& Alexium in rationum argumento peregrinum oſtendit. dico igitur, Auctorem quod promiſit, abundè preſtitiſſe, ac docuiſſe quomodo argumentatio à diſſimilibus rationibus, iiſque proximis & immediatis, procedere debeat: quod ſic oſtendo.

Certum eſt, præcipuum argumentationis à rationibus diſſimilibus fundamentum eſſe, datarum quarumcunque rationum diſſimilium, exhibere denominatores, & proportionem notam reddere: atqui Auctor pluribus id demonſtrat modis, propoſitione 2,7,13.14.84 ergo &c.

Certum eſt ſecundò, ad argumentandum ex rationibus diſſimilibus, maximè neceſſarium eſſe, quarumuis rationum diſſimilium proportiones interſe comparare, earumque rationes notas facere; atque id Auctor toto paſſim libro octauo demonſtrat: ergo &c.

Certum eſt tertiò, ad argumentum ex rationibus diſſimilibus, plurimum pertinere formas illas argumentandi, quibus Euclides, permutando, inuertendo, componendo, diuidendo & ex æquali, vſus eſt in rationibus ſimilibus. atque omnes illas, diſſimilibus rationibus applicuit Auctor, propoſitione 44.45.46.47.48.49. ergo &c.

Certum eſt quartò, ad argumentum à rationibus diſſimilibus ſpectare formas illas argumentandi, quibus Arithmetici, addendo, multiplicando, diuidendo, ſubtrahendo vtuntur; atque illas etiam Auctor tota parte quinta lib. 8. diſſimilibus applicuit rationibus, ergo &c.

Quæro nunc ab Alexio, num ad argumentandi modum ex rationibus diſſimilibus, præter iam dicta aliud requirat, an non. ſi prius, quid velit edat, & ilicò id in Auctoris libro oſtendam, vel ex eo deducam. ſi poſterius, fidem igitur ſuam liberauit Auctor, & quod facturum ſe promiſit, præſtitit abundè.

Aſſerit 3. antiquis haud ignotum fuiſſe argumentandi modum à rationibus diſſimilibus, non quidem proximis, quia id fieri nequeat, neque id Auctor vſpiam demonſtrarit, ſed remotis.

Aſſertionis huius falſitas, ex præcedenti parte manifeſta eſt. cum enim ante & præter Auctorem, nemo rationum diſſimilium, item proportionum quarumcunque denominatores exhibuerit, illarumque proportiones, ac proportionum rationes notas fecerit, nemo item formas argumentandi, quibus Euclides lib. 5. & Arithmetici in fractionibus vtuntur, diſſimilibus rationibus applicuerit, atque in his tota conſiſtat methodus argumentandi à rationibus diſſimilibus, nemo vtique ex iiſdem argumẽtari potuit, adeoque modum illum argumentandi à rationibus diſſimilibus notum habuit.

Quod addit, à rationibus diſſimilibus proximis, argumentum deſumi non poſſe, neque id ab Auctore vllibi factum eſſe, plane vt reliqua, falſum eſt: nam argumentari à rationibus diſſimilibus proximis, nil aliud eſt, quam diſſimiles rationes immediatè interſe conferre, & proportionem illarum notam reddere, & cum alia diſſimilium rationum proportione comparare: quod Auctor toto proportionalitatum libro non tantum agit, ſed vnicè agit, & in hoc totus collimat liber.

Propo-

Propoſitio autem illa, quam eandem ait eſſe cum 60 Auctoris, toto cælo ab hac differt; nec quidquam habet commune aut ſimile: neque magis ſpectat ad argumentationem ex rationibus diſſimilibus proximis, quam Auctor docet, quam quod maximè eſt inpertinens, quale illud quod de rectangulis quatuor proportionalibus addit, & quidquid ſpectat ad rationem compoſitam.

LIBRI PRIMI FINIS.

SYLLABVS CAPITVM

ET MATERIARVM

LIBRI PRIMI.

CAPVT I. Pars 1. *Quid ratio? an ſit vera quantitas, & qualis.* Pars 2. *Errores Meibomij.*

CAP. II. *Inter quas magnitudines detur ratio. an inter finitam & infinitam, curuam & rectam, angulos contingentia, &c.*

CAP. III. *De modo duplici rationes inter ſe comparandi. altero quidem ſecundum quantitatem, altero ſecundum multiplicationem. item an & in quo differat ratio multiplex à multiplicata, dupla à duplicata, tripla à triplicata &c.*

CAP. IV. *Quid proportio, medietas, proportionalitas; Marci Meibomij errores de proportione.*

CAP. V. *De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum numeris expreſſarum.* Pars 1. *de denominatore rationis ſolitariè ſumpta.* Pars 2. *de denominatore proportionis.*

CAP. VI. *De natura & munere denominatorum, rationum ac proportionum irrationalium:* Pars 1. *de denominatore rationis ſolitariè ſumpta:* Pars 2. *de denominatore proportionis:* Pars 3. *de inuentione denominatorum quarumcunque rationum ac proportionum.*

CAP. VII. *Digreſſio ad Clariſſimum virum A A: qui Cenſoris nomine deinceps venit. compendium noua illius de rationibus doctrina, & indicium P. Gregorij de eadem.*

CAP. VIII. *Digreſſio ad Euthymium Grammaticum:* Pars 1. *Thraſoniſmi Euthymij Grammatici.* Pars 2. *Calumnia eiuſdem in pracipuos Geometras.* Pars 3. *Synopſis doctrina Euthymij Grammatici;* Pars 4. *Antiquorum propoſitiones ab eodem falſitatis aut male demonſtrationis accuſata.*

CAP. IX. *An logarithmi aut ſpatia hyperbolica, rectis lineis vni aſymptotorum paralelis incluſa, ſint rationum denominatores, contra Cenſorem A A.*

CAP. X. *De ratione æqualitatis.* Pars 1. *quo ſenſu aqualitatis ratio, caterarum ſit elementum.* Pars 2. *reijcitur doctrina Cenſoris A A.* Pars 3. *reijciuntur errores Euthymij Grammatici.*

CAP. XI. *De rationum aqualitate.* Pars 1. *explicatur definitio 6. lib. 5. Eucl.* Pars 2. *expenditur indicium aqualitatis rationum à recentiore nuper allatum.* Pars 3.

SYLLABVS CAPITVM LIBRI PRIMI.

Pars 3. *proprietates aliquot æqualitatis rationum.*

CAP. XII. *De mutuo rationum exceſſu & defectu ſecundum quantitatem.* Pars 1. *an maioritas vnius rationis ſuper alia, deſumenda ſit penes multiplicationem.* Pars 2. *vnde deſumi debeat maioritas & minoritas rationum ſecundum quantitatem.* Pars 3. *regula ex quibus dignoſci queat, vtra ex propoſitis rationibus, ſit maior minorúe alterâ.* Pars 4. *reijcitur doctrina Cenſoris A A.* Pars 5. *reijciuntur errores Euthymij Grammatici.*

CAP. XIII. *An rationes poſſint conſiderari vt fractiones ſeu minutiæ? reijciuntur errores Euthymij Grammatici.*

CAP. XIV. *De rationum additione.* Pars 1. *an additio rationum ab earundem multiplicatione differat, & in quo.* Pars 2. *quâ methodo fiat rationum additio.*

CAP. XV. *De rationum compoſitione & multiplicatione.* Pars 1. *rationum compoſitio, ſolâ multiplicatione perficitur.* Pars 2. *reijcitur doctrina Cenſoris A A.* Pars 3. *quo pacto fiat rationum multiplicatio.* Pars 4. *vtra ex duabus rationibus propoſitis, ſit alterius multiplicata, & quoties.* Pars 5. *vindicatur à cenſura propoſ. 75. operis Geom. lib. 8.*

CAP. XVI. *De rationibus proportionalibus.*

CAP. XVII. *Spongia centuriæ Cenſurarum quas in lib. 8. P. Gregorij, tulit Cenſor A A.*

CAP. XVIII. *Cenſura quindecim Theorematum, à Cenſore A A propoſitorum.*

CAP. XIX. *Digreſſio ad Alexium Syluiū Polonum de proportionalitatibus.*

F I N I S.

PRIMA CIRCVLI QVADRATVRA.

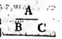
PARS PRIMA

Explicatio propoſitionum aliquot primæ quadraturæ, quæ perperam à nonnullis intellectæ, occaſionem dedere, primam quadraturam vitij & paralogiſmi arguendi.

De Propoſitionibus 5. & 6. lib. 10. Auctoris.

INter eas propoſitiones, quæ ad euertendam quadraturam primam in dubium vocatæ ſunt, primum locum obtinent propoſitiones, quinta & ſexta lib. 10. operis geom. quas non ſolum vt non rectè demonſtratas, ſed vt falſas, ſe inuicem euertentes, chymericas &c. cenſuit non nemo, huiuſmodi ſcripto ad amicum Geometram miſſo; quod tam clarum & liquidum cenſebat illius Auctor, atque vlla in toto opere geometrico eſt demonſtratio.

Defectus quadraturæ P. Gregorij à S. Vincentio.



P*Aralogiſmus primus eſt in lib. 10. propoſ. 5. quæ eſt huiuſmodi.* Data ſit ratio A, ad quamuis aliam quantitatem diuiſam in B C: dico, quod ratio A ad B, excedat rationem A ad BC, ratione C ad B. ratio A ad B, ad rationem A ad B C, per præcedentem, æquatur rationi B C ad B, ad rationem B ad B; ſed etiam ratio B C ad B, ſuperat rationem B ad B, ratione C ad B, igitur etiam ratio A ad B, ſuperat rationem A ad B C, ratione C ad B.



Manifeſtè deficit vltima conſequentia; & peccat contra propoſ. 17. 5. quæ docet, ſi fuerint quatuor quantitates D, E, F, G, & quidem vt D ad E, ita F ad G: ſit vero exceſſus quo D ſuperat E, ipſa D H; non fore ipſam D H, exceſſum quantitatis F, ſuper G, quod propoſitio in conſequentia, quam deficere dixi, aſſumit: ſed exceſſum F I, quo F ſuperat G, fore proportionalem exceſſui, quo D H ſuperat E; ſic vt ſit D H ad E, ſicut F I ad G: quod ad oculum patet in numeris 10. 5. 40. 20. exceſſus enim ſunt 5 & 20, oportebat igitur inferre, ratio A ad B ſuperat rationem A ad B C aliquâ ratione, quæ ita ſe habet ad rationem A ad B, ſicut ratio C ad B ad rationem C B ad B.

Idem prorſus error interuenit in propoſ. proximè ſequenti; in vltima item conſequentia: ex quo fit, vt duæ hæ propoſitiones ſe inuicem manifeſte euertant, dum prima dicit, rationem A ad B, excedere rationem A ad B C ratione C ad B, ſecunda autem dicit in æquiualentibus terminis, rationem A ad B excedere ratio-

15, ad ratione͂ B ad B 15 ad 15: quod verum eſt: ſed ratio B C ad B 20 ad 15, ſuperat rationem B ad B 15 ad 15, ratione C ad B 5 ad 15, ad rationem C B ad B 20 ad 15: quod etiam verum eſt, nam ex doctrina Auctoris prop. 2. l. 8. ratio 5 ad 15, ad rationem 20 ad 15, (quia vtraque ad idem conſequens) ſe habet vt antecedens ad antecedens, nempe vt 5 ad 20: ſed 5 reſpectu 20 eſt quarta pars; ergo ratio B C ad B 20 ad 15, ſuperat ratione͂ B ad B 15 ad 15, quartâ parte ipſius 20. adeoque nu. 20 ſi quarta pars detrahatur, remanet 15, & ita fient rationes æquales 15 ad 15, & 15 ad 15: quia à ratione 20 ad 15, ablatus eſt exceſſus, quo ſuperabat rationem æqualitatis 15 ad 15: quare vera eſt minor demonſtrationis, ſi benè & iuxta mentem Auctoris intelligatur; vera eſt eodem modo conſequentia: igitur etiam ratio A ad B 20 ad 15, ſuperat rationem A ad B C 20 ad 20, ratione C ad B 5 ad 15, ad rationem C B ad B 20 ad 15; quia ob eam doctrinam & demonſtrationem iam explicatam Auctoris, ſuperat illam quartâ parte numeri 20: quâ ablatâ, fient rationes æquales 15 ad 15. & 20 ad 20.

Simili modo vera eſt 6. propoſitio, ſi eius demonſtratio eodem modo intelligatur iuxta mentem & doctrinam Auctoris: bene enim concludit, quod ratio A ad B 20 ad 15. excedat ratione͂ A ad B C 20 ad 20, ratione C ad A 5 ad 20, ad rationem B C ad A 20 ad 20; cum enim ratio C ad A 5 ad 20, & ratio B C ad A 20 ad 20, habeant idem conſequens; per 2. l. 8. ſe habent vt antecedens ad antecedens, nempe vt 5 ad 20: ſed 5 ad 20 ſe habent vt quarta pars reſpectu 20, ergo ratio A ad B 20 ad 15, ſuperat rationem A ad B C 20 ad 20, per quartam partem antecedentis, quâ ablatâ fiet æqualitas rationum 15 ad 15, & 20 ad 20, vt patet.

Cæterum cum hic Auctor in lib. de proportionalitatibus, ponat ſua principia, & incedat nouâ viâ, demonſtratiuè ſemper progrediendo, mirum non eſt quod difficilior ſit; & niſi eius principia, & ratio progrediendi ac demonſtrandi in hac materia diligenter examinentur, & intelligantur, facilè erit eius propoſitiones ac demonſtrationes non accipi in eo ſenſu in quo ab ipſo accipiuntur.

Ex his patet, ad inſtantiam ex Euclide: cum hic non ſumatur nuda proportio C ad B, ſed proportionalitas modo dicto. neque peccat vllo modo propoſ. 12, eiuſdem lib. nam id quod ſupponit, vt vidimus, verum eſt; quod autem confundat multiplicationem cum additione, falſum eſt euidenter; ſemper enim loquitur de multiplicatione, & fit progreſſus à rationibus auctis per multiplicationem, ad rationes auctas etiam per multiplicationem; non autem per additionem, vt obijcitur: nam ratio A L, continet per multiplicationem bis C N, & ratio C H continet bis per multiplicationem rationem D O: ſimiliter etiam ex demonſtratione 27 progreſſ. ratio A Q, continet etiam per multiplicationem bis rationem C S; & C S continet etiam per multiplicationem bis D T, ergo ſemper loquitur de progreſſu per multiplicationem, non per additionem: legatur attentè propoſ. 27. de progreſſ à qua deſumitur medius terminus huius 12, & reperietur quod Auctor ſemper loquatur eodem paſſu de multiplicatione.

Hucuſque R. P. Ioannes Baptiſta Giattinus; ex quo manifeſtum eſt eos qui propoſitiones illas vt falſas, vt ſe inuicem euertentes condemnarunt, nil niſi nodum in ſcirpo quæſiuiſſe.

Cæterum, ſi quis vlteriorem huius materiæ deductionem, & fuſiorem explicationem deſideret, is elegantem tractatum P. Alphonſi de Saraſſa, quem ea de re conſcripſit, legat; multaque iſtic lectu digna, & quæ paucis fuere nota reperiet.

DE PROPOSITIONE VII. & VIII.

Lib. 10. Auctoris.

A C E
B D F

DVobus modis hucuſque Geometria, rationem duarũ quantitatum ad duas alias, vel plurium ad plures exhibuit: prior ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 12: & eſt huiuſmodi: ſi fuerit vt A ad B, ita C ad D, & E ad F &c. erunt omnes A C E, ad omnes B D F, vt prima A ad primam B.

A B C D E F
G H M I K L

Poſterior, Archimedis eſt propoſ. 2. de conoid. ſi fuerit vt A ad B, ita D ad E, & vt B ad C ita E ad F, fueritque inſuper vt A ad G ita D ad I, & vt B ad H ita E ad K, denique vt C ad M ita F ad L, erunt omnes A B C ad omnes G H M, vt omnes D E F ad omnes I K L.

Quia vero propoſitiones illæ certas ac determinatas quantitatum limitationes requirunt, nouam Auctor & vniuerſalem adinuenit methodum, quotcunque & qualeſcunque quantitates comparandi, cum totidem aut pluribus aut paucioribus aliis, etiam quibuſcunque. quæ adinuentio, non adeo leuis eſt momenti, vt nonnulli exiſtimarunt; ſed eo vergit, vt ex rationibus omnibus ſecundum quas, partes in quas tota diuiſa ſunt, conferri interſe poſſunt, totorum rationes innoteſcant: quæ res vt melius intelligatur, pauca prius annotabo, quam ad demonſtrationes procedam.

A
B C

Sit ratio quæuis A ad B, & ipſi B intelligatur addi quantitas C demonſtrat Euclides lib. 5. propoſ. 8. quod ratio A ad B, ſit maior ratione A ad B C; quod veriſſimum eſt, quidquid opponat Cenſor, vt oſtendi cap. 12. lib. primi: explicandum modo eſt, quomodo, & qualis fiat alteratio, tam in ratione A ad B, quam in ratione B ad A, per acceſſum quantitatis C, ad quantitatem B.

Pro qua re, aduerte 1. inter omnes duos terminos duplicem eſſe relationem: vnam, qua A vt antecedens, refertur ad B vt conſequens; alteram (quæ priori correſpondet) qua B vt antecedens, refertur ad A vt cõſequens: quæ duæ relationes, ita eſſentialiter interſe ſunt cõnexæ, vt vna creſcente, altera neceſſario decreſcat, & viciſſim vna deſcreſcente, creſcat altera.

Aduerte 2. per acceſſum quantitatis C ad quantitatem B, non tolli relationem A ad B, aut B ad A, ſed hanc augeri, illam vero minui: augetur relatio B ad A, relatione C ad A, quæ cum priori facit relationem B C ad A, maiorem vtique quam ſit relatio B ad A: & quia relatio B ad A creſcit per acceſſum C ad B, neceſſario decreſcit correlatio A ad B, & ſit relatio A ad B C.

A
B C

Aduerte 3. quod ſicut per acceſſum quantitatis C ad B, noua oritur relatio C ad A, diſtincta à relatione B ad A, ita viciſſim noua oritur correlatio A ad C, diſtincta à relatione A ad B. quod clarius patet ſi A & B ponantur æquales, & C dupla ipſius A vel B tunc enim relatio C ad A, erit dupla, & correlatio A ad C ſubdupla, cum tam A ad B, quam B ad A, ſit æqualitatis.

Aduerte 4. quod per acceſſum C ad B, ſicut relatio C ad A, accedens ad relationem B ad A, facit relationem B C ad A, ita correlatio A ad C, accedens

Accedens relationi A ad B, facit relationem A ad BC: & ſicut relatio B C ad A, maior eſt relatione B ad A, ita relatio A ad B C, minor eſt relatione A ad B: quæritur modo, quare relatio C ad A, accedens relationi B ad A, faciat quid maius, correlatio autem A ad C, accedens relationi A ad B, faciat quid minus pro quo.

Aduerte 5. quod relatio C ad A accedens relationi B ad A, exſurgat ex augmento antecedentis B, per additionem quantitatis C, inuariato manente conſequente A: aucto autem B antecedente, inuariato conſequente A, ſemper creſcit ratio B ad A, & quidem eâ proportione quâ creſcit antecedens B. vnde relatio C A accedens relationi B A, facit relationem B C ad A, maiorem quam fuerit B ad A. quia vero correlatio A ad C, non oritur ex augmento antecedentis A, ſed conſequentis B, per acceſſum C ad B, neceſſario relatio A ad C accedens relationi A ad B facit relationem A ad B C, minorem quam fuerit relatio A ad B: aucto enim conſequente B, inuariato antecedente A, diminuitur ratio A ad B, & quidem eâ proportione quâ creſcit conſequens B.

Aduerte 6. quod ſicut relatio C ad A accedendo relationi B ad A hanc auget & oſtendit quantum relatio B ad A, creuerit per acceſſum C, ad antecedens B, ita correlatio A ad C, accedendo ad A B, hanc imminuit & oſtendit, quantum relatio A ad B defecerit per acceſſum C ad conſequens B, ſiue quantum B excreuerit per acceſſum C: vnde acceſſus relationis A C ad relationem A ad B non eſt additio ſed mutilatio.

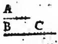
Aduerte 7. quod dum Euclides demonſtrat, rationem A ad B C, minorem eſſe ratione A ad B, conſiderauerit duas illas relationes A ad B, & A ad C per modum vnius quod exſurgit ex additione quantitatis C ad quantitatem B, quia hoc propoſito illius ſufficiebat; quia tamen per acceſſum C ad B, ſicut noua oritur relatio C ad A, diſtincta à relatione B ad A, ita noua quoque exſurgit correlatio A ad C, diſtincta à relatione A ad B, & Auctor illâ conſideratione ad propoſitum ſuum indigeat, duas illas relationes A ad B, & A ad C in ratione A ad B C, vt diſtinctas, quales verè ſunt, contemplatur. ex quibus patet doctrinam Auctoris, quam in propoſ. 7 & 8 tradit, non eſſe fictitiam aut chymericam, (vt nonnulli, minus in rationum natura verſati, exiſtimarunt) ſed veriſſimam eſſe, & planè in Euclide fundatam.

His prænotatis, facilis erit propoſitionis 7 & 8 demonſtratio. quas quia Auctor ex 5 & 6 deducit, illas primum in vero ac genuino ſuo ſenſu proponam ac demonſtrabo.

PROPOSITIO V.

Lib. 10.

Sit A antecedens, & conſequens diuiſum vtcunque in B & C. dico quod ratio A ad B, excedat rationem A ad B C, parte aliquâ rationis A ad B, quæ ad ipſam rationem A ad B ſe habet, vt ratio C ad B eſt ad rationem B C ad B.



Ratio A ad B, eſt ad rationem A ad B C, vt B C ad B per 7 de proport. ſed vt B C ad B, ita eſt ratio B C ad B ad rationem B ad B per 1 eiuſdem, igitur vt

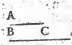
 ratio

ratio B C ad B eſt ad rationem B ad B, ita ratio A ad B eſt ad rationem A ad B C, ſed ratio B C ad B; ſuperat rationem B ad B, ratione C ad B (quæ pars eſt rationis B C ad B per 114. eiuſdem) igitur & ratio A B, ſuperat rationem A ad B C, parte aliquâ rationis A ad B, quæ ad ipſam rationem A B ſe habet, vt ratio C ad B eſt ad rationem B C ad B. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Lib. 10.

Iiſdem poſitis; dico rationem A ad B C, deficere à ratione A ad B, ratione aliquâ, quæ ad ipſam rationē A B ſe habet, vt ratio C ad A ſe habet ad rationem B C ad A.



Ratio C ad A eſt ad rationem B C ad A, vt C eſt ad B C; per 2 de proport. ſed vt C ad B C, ita ſe habet ratio C ad B ad rationem B C ad B, per eandem; igitur ratio C ad A eſt ad rationem B C ad A, vt ratio C ad B eſt ad rationem B C ad B. ſed ratio A ad B, per præcedentem, ſuperat rationem A ad B C, exceſſu aliquo rationis, qui ad ipſam rationem A B ſe habet vt ratio C ad B ſe habet ad rationem B C ad B, igitur & ratio A B ſuperat rationem A ad B C, exceſſu aliquo rationis, qui ad ipſam rationem A ad B ſe habet, vt ratio C ad A ad rationem B C ad A; igitur ratio A ad B C deficit à ratione A ad B, defectu aliquo rationis, qui ad ipſam rationem A ad B, ſe habet vt ratio C ad A ad rationem B C ad A. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Lib. 10.

Iiſdem poſitis: dico rationem A ad B C conſtitui ex duabus rationibus A ad B & A ad C.

Ratio A ad B C reſultat ex augmento conſequentis B, per acceſſum quantitatis C. igitur ratio A ad B C conſtituitur ex iis quæ reſultant ex additione C ad B: ſed per acceſſum quantitatis C ad B non tollitur relatio A ad B ſed accedit relatio A ad C, quæ quia oritur non ex augmento antecedentis A, ſed ex augmento conſequentis B, diminuit relationem A ad B vt oſtendi notabili 5 & 6 pag. 93. igitur ratio A ad B conſtituitur ex duabus rationibus A B, A C.

Eadem propoſ. aliter demonſtratur.

Ratio A ad B C per 6. lib. 10. æquatur rationi A ad B diminutæ ratione aliquâ quæ ad ipſam A B ſe habet, ſicut ratio C ad A eſt ad rationem B C ad A. ſed ratio A B ſic diminuitur per acceſſum rationis A C (quia cum hæc oritur ex augmento conſequentis B per C, non additur

rationi

rationi A ad B, ſed hanc imminuit) igitur ratio A ad B C conſtituitur ex duabus rationibus A B ad A C.

Idem demonſtratur in numeris.

A	B	C
12	2	4

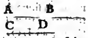
SIt A 12. B 2. C 4, ratio A B reducta ad minimos numeros erit ratio 6 ad 1; ratio A C reducta ad minimos numeros, quos patitur commune antecedens 6, eſt ratio 6 ad 2. addantur conſequentes 2 & 1, exſurgent 3: eritque ratio A ad B C ratio 6 ad 3: ſed quia ratio A B 6 ad 1 per acceſſum rationis A C, tantum diminuitur, quantum ratio B ad A creſcit per acceſſum rationis C ad A, ratio autem B A ſubſextupla, per acceſſum rationis C ad A ſubtriplæ, fit ratio B C ad A, ſubdupla; igitur ratio A ad B ſextupla per rationem A C triplam, diminuitur & fit ratio A ad B C, dupla:

Propoſitio 7 quoad rem non differt à ſexta, ſed in modo loquendi, idque ea de cauſa tantum, quod in 7, explicitè in conſiderationem adducatur ratio A ad C, cuius in 6 explicitè mentio non fit.

PROPOSITIO VIII.

Lib. 10.

QVemadmodum propoſitio 6 differt à 7, penes modum loquendi tantum, eademque ratio A ad B C in 6 comparatur cum ratione A ad B diminuta, in 7 vero cum rationibus A B, A C: ita octaua propoſitio, ſecundum duplicem loquendi modum explicari & demonſtrari poteſt: quorum vtrumque iam præſtabo.



Sint A B, C D termini, rationis A B ad C D, vtcunque diuiſi:

Dico 1. rationem vtriuſque A B ad vtrumque C D, æquari rationi A B ad C, mutilatæ parte aliquâ ſui, quæ ſic ſe habet ad ipſam rationem A B ad C, vt ratio D ad A B ſe habet ad rationem C D ad A B. Ratio A ad C, addita rationi B ad C, æquatur rationi A B ad C, per 114 lib. 8. ſimiliter ratio A ad D, addita rationi B ad D, æquatur rationi A B ad D: cum igitur duæ rationes, A B ad C, A B ad D, idem habeant antecedens A B, & conſequens diuiſum; erit per 6 lib. 10, ratio A B ad totum C D, æqualis rationi A B ad C, mutilatæ parte aliquâ ſui, quæ ad ipſam rationem A B ad C ſe habet, ſicut ratio D ad A B, eſt ad rationem C D ad A B: quod erat demonſtrandum.

Dico 2. rationem A B ad C D, conſtitui ex quatuor rationibus A C, A D, B C, B D. Ratio A ad C D, addita ratio B ad C D, facit rationem A B ad C D, per 114. lib. 8: ſed ratio A ad C D, per 7 lib. 10, conſtituitur ex rationibus A C, A D, ſimiliter ratio B ad C D, conſtituitur ex rationibus B C, B D, igitur ratio A B ad C D, conſtituitur ex rationibus quatuor A C, A D, B C, B D: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Lib. 10. oper. Geom.

SInt quatuor ordines quinque continuè proportionalium ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, habentes vltimas quantitates EKPV æquales.

Dico rationem duarum AF ad duas LQ, toties continere rationem duarum CH ad duas NS, quoties hæc ratio continet rationem duarum DI ad duas OT.

Hoc eſt prout Auctor intelligit.

DIco, rationem duarum AF ad duas LQ, conſtitui ex iis rationibus, ſecundum prop. 8. iam explicatam, quæ toties ſunt multiplicatæ rationum, ex quibus conſtituitur ratio duarum CH ad duas NS, quoties hæ ipſæ rationes multiplicant eas, ex quibus conſtituitur ratio duarum DI ad duas OT.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	K
L	M	N	O	P
Q	R	S	T	V

Ratio duarum AF ad duas LQ, iuxta 8 ante explicatam, conſtituitur ex quatuor rationibus AL, AQ, FL, FQ: ſimiliter ratio duarum CH ad duas NS, conſtituitur ex rationibus CN, CS, HN, HS; denique & ratio duarum DI ad duas OT, conſtituitur ex rationibus DO, DT, IO, IT: ſed rationes AL, AQ, FL FQ, toties ſunt multiplicatæ rationum CN, CS, HN, HS (ſingulæ nimirum ſingularum ſibi correſpondentium) quoties hæ ipſæ ſunt multiplicatæ rationum DO, DT, IO, IT per 27. de progreſ. igitur ratio AF ad LQ, conſtituitur ex iis rationibus, quæ toties per multiplicationem continent rationes, ex quibus conſtituitur ratio CH ad NS, quoties hæ ipſæ rationes per multiplicationem continent rationes, ex quibus conſtituitur ratio DI ad OT. quod erat demonſtrandum.

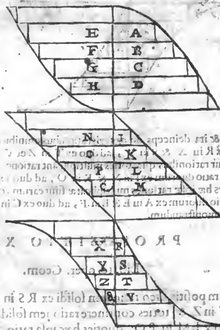
Hinc patet quid Auctor intelligat per verbum continere (ex quo ſolo verbo malè intellecto, omnes errores nati ſunt; non enim vult rationem AF ad LQ toties per multiplicationem continere rationem CH ad NS, quoties hac per multiplicationem continet rationem DI ad OT; ſed rationem AF ad LQ, iuxta octauam, continere eas rationes, ſiue ex iis conſtitui, quæ toties ſunt multiplicatæ rationum quas continet ſiue ex quibus conſtituitur ratio CH ad NS, quoties hæ ipſæ ſunt multiplicatæ rationum quas continet ſiue ex quibus conſtituitur ratio DI ad OT.

PROPOSITIO XXXIX.

Lib. 10. oper. Geom.

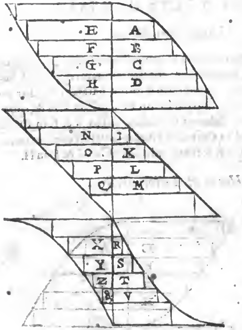
DEmonſtrandum eſt in hac propoſitione (omitto breuitatis cauſa, ſcema vniuerſale, & conſtructionem, quæ apud Auctorem videri poteſt) quod ratio duorum paralelopipedorum ex R in X, et S in Y, ad duo paralelop. ex T in Z et V in &, toties contineat rationem duorum paralelop. ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q, quoties hæc ipſa ratio, continet rationem duorum ex A in E & B in F, ad duo ex C in G & D in H.

Hoc eſt vt Auctor intelligit.



QVod ratio duorũ paralelop. ex R in X & S in Y, ad duo ex T in Z et V in &, iuxta 8, ex iis conſtituatur rationibus, quę toties multiplicatæ ſunt rationum, ex quibus conſtituitur ratio duorum ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q, quoties hæ ipſæ rationes multiplicatę ſunt earum, ex quibus cõſtituitur ratio duorum paralelop. ex A in E, & B in F, ad duo ex C in G & D in H.

RAtio duorum paralelop. ex R in X & S in Y, ad duo ex T in Z et V in &, iuxta 8, conſtituitur ex quatuor rationibus, nimirum ex ratione R in X ad T in Z, R in X ad V in &, S in Y ad T in Z, S in Y ad V in &: ſimi-



& : ſimiliter ratio duorum ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q conſtituitur ex rationibus I in N, ad L in P, I in N ad M in Q, K in O ad L in P, K in O ad M in Q : denique ratio duorum, ex A in E & B in F, ad duo ex C in G & D in H, conſtituitur ex rationibus A in E ad C in G, A in E ad D in H, B in F ad C in G, B in F ad D in H. ſed per 38, & coroll. eiuſdem, lib. 10. Auctoris, ratio R in X ad T, in Z, toties multiplicat rationem I in N ad L in P, quoties hæc ipſa multiplicat rationem A in E ad C in G, & ita deinceps de cæteris rationibus omnibus. igitur ratio duorum ex R in X & S in Y, ad duo ex T in Z et V in &, ex iis conſtituitur rationibus, quæ toties multiplicant rationes, ex quibus conſtituitur ratio duorum ex I in N & K in O, ad duo ex L in P & M in Q, quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum, ex quibus conſtituitur ratio duorum ex A in E & B in F, ad duo ex C in G & D in H. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Lib. 10. oper. Geom.

IIſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex R S in X Y, ad ſol. ex T V in Z &, toties continere rationem ſolidi ex I K in N O, ad ſol. ex L M in P Q, quoties hæc ipſa ratio, continet ratione ſolidi ex A B in E F, ad ſol. ex C D in G H.

Hoc eſt iuxta auctoris mentem.

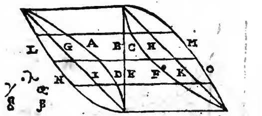
Dico rationem ſolidi ex R S in X Y, ad ſol. ex T V in Z &, conſtitui, iuxta 8, ex iis rationibus, quæ toties multiplicatæ ſunt

tæ ſunt illarum rationum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex I K in N O ad ſol. ex L M in P Q, quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex A B in E F, ad ſolidum ex C D in G H.

PEr præcedentem ratio duorum paralelopipedorum ex R S in X Y ad duo paral. ex T V in Z & cõnſtituitur ex iis rationibus, quæ toties ſunt multiplicatæ earum rationum, ex quibus conſtituitur ratio duorum paral. ex I K in N O ad duo ex L M in P Q, quoties hæ ipſæ rationes ſunt multiplicatæ illarum, ex quibus conſtituitur ratio duorum paral. ex A B in E F, ad duo ex C D in G H: ſi igitur paralelopipeda illis inſcripta ſolidis, non ſint maiora dimidiis corporum quibus inſcribuntur, inſcribantur tot, vt exſuperent dimidia ſolidorum quibus inſcribuntur, & eadem fiat argumentatio: cum igitur id ſemper deinceps fieri poſſit, & inſcripta maiora ſint dimidiis ſolidorum quibus inſcribuntur, manifeſtũ eſt ſolida illa per inſcriptionem continuatam exhauriri: quia vero eadẽ proprietas conuenit ipſis progreſſionis terminis vt oſtendit Auctor prop. eadem euidens eſt rationem totius ſolidi ex R S in X Y, ad ſolidum ex T V in Z &, conſtitui ex iis rationibus quæ toties ſunt multiplicatæ rationum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex I K in N O, ad ſol. ex L M in P Q, quoties hæ ipſæ rationes, multiplicatæ ſunt illarum, ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex A B in E F, ad ſol. ex C D in G H. quod erat demonſtrandum.

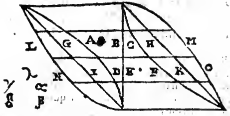
Scholium.

PRiuſquam ad propoſitionem 44, in qua totum primæ quadraturæ momentum conſiſtit, accedam, paucis expedire viſum eſt, quid & quâ ratione ex partialium illâ rationum æquimultiplicatione, propoſitione 40 demonſtratâ, de totalibus rationibus, quæ inter ſex illa ſolida reperiuntur, legitimè inferri ac concludi poſſit:



Eſto ſolidum ex A B in BC, idem quod in propoſ. 40, oritur ex plano parabolico R S in plan. parab. X Y: & ſolidum ex D E in E F, idem quod oritur ex plan. parab. T V in plan. parab. Z &. item ſol. ex G B in B H, idem quod oritur ex trapezio I K in trap. N O: & ſolidum ex I E

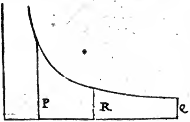
 in E K,



in EK, idem cum eo, quod oritur ex trap. LM in trap. PQ: denique ſolidum ex LB in BM, idem quod oritur ex plano parab. AB in plan. EF: & ſolidum ex plan.parab. NE in plan.parab. EO, idem quod oritur ex plano parab. CD in plan.parab. GH: vocentur autem breuitatis cauſa duo prima ſolida, AC, DF. ſecunda vero,ſolida GH, IK; tertia denique, ſolida LM, NO.

Cum igitur cubata ſint quatuor prima ſolida, nimirum AC, DF, GH, IK; & per propoſ.43.lib.10. oper. Geom. nota facta ſit ratio, tam ſolidi AC ad ſol. DF, quam ratio ſol. GH ad ſol. IK: nota quoque eſt proportio rationis ſol. AC ad ſol. DF, ad rationem ſol: GH ad ſol: IK: ſit itaque ratio ſol. AC ad ſol: DF, eadem quæ α ad β: & ratio ſol. GH ad ſol. IK, eadem quæ γ ad δ: fiatque vt δ ad γ ita β ad λ: erit vt α ad λ ita ratio αβ ad rationem γδ, hoc eſt ratio ſol: AC ad ſol: DF, ad rationem ſol: GH ad ſol: IK.

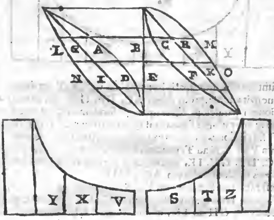
Vlterius: cum rationes duæ, ſolidorum AC ad DF, & GH ad IK, per diuerſos rectè numeris exhibitæ ſint, conſtat rationes illas eſſe rationales: & tam ſol. AC ipſi DF, quam ſol: GH ipſi IK eſſe commenſurabile: vnde etiam tam α ipſi β, quam γ ipſi δ erit commenſurabile. quia vero ratio λ ad β, eſt ratio γ ad δ, erit ratio λ ad β rationalis, & λ ipſi β commenſurabile: ſed etiam α ipſi β eſt commenſurabile, (cum ratio α ad β rationalis ſit) igitur & α ipſi λ eſt commenſurabile.



Aſſumatur itaque hyperbola, cuius aſymptoti rectū contineant angulum; in qua alteri aſymptotorum parallelæ ponantur, rectæ P. R. Q, ipſis α, β, λ proportionales: nimirum vt α eſt ad β ita Q ſit ad P: & vt λ ad β ita R ad P: rationes igitur duæ Q ad P, R ad P ſunt rationales; & ratio Q ad P eſt ad rationē R ad P, ſicut ratio αβ eſt ad rationem λβ, hoc eſt ratio ſol. AC ad ſol: DF ad rationem ſol. GH ad ſol. IK: ſed per 129 de hyperb. ratio QP tam eſt multiplicata rationis RP, quam ſpatium QP multi-

Q P multiplex eſt ſpatij R P, igitur quam multiplex eſt ſpatium Q P, ſpatij R P, tam ratio ſol. A C ad ſol. D F multiplicata eſt rationis ſolidi G H ad ſol. I K. quia vero rationes Q P, R P rationales ſunt, neceſſario ſpatia hyperbolica Q P, R P ſunt interſe commenſurabilia, vt facile poteſt demonſtrari: inuenta igitur communi illorum menſura, innoteſcit ilico, quam multiplex ſit ſpatium Q P, ſpatij R P: vnde & innoteſcit, quoties ratio ſolidi A C ad ſol. D F multiplicata ſit rationis ſol. G H ad ſol. I K.

His ritè expoſitis, tota ſupereſt difficultas, quid & quomodo, ex duabus primis rationibus, tam ſecundum quantitatem, quam ſecundum multiplicationem notis, de tertia, nimirum ratione ſolidi L M ad ſol. N O inferri poſſit.



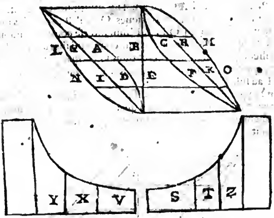
Eſto eadem figura quæ prius L M N O: & ponantur duæ æquales hyperbolæ, quarum aſymptoti rectum contineant angulum.

Quoniam rationes duæ ſolidorum A C, D F, & G H, I K notæ ſunt & rationales, ſciaturque inſuper quoties ratio ſolidi A C ad ſol. D F multiplicata ſit rationis ſol. G H ad ſol. I K; ſunto in duabus hyperbolis ſpatia S, T, V, X, à rectis alteri aſymptotorum paralelis incluſa, ſic vt ratio plani hyperbolici V ad planum S, tam multiplex ſit rationis plani X ad planum T, quam ratio ſolidi A C ad ſol. D F, multiplicata eſt rationis ſol. G H ad ſol. I K: hoc poſito.

Dico, rationes partiales ex quibus conſtituitur, iuxta 8, lib. 10. oper. Geom. ante explicatam ratio totalis planorum V & S tam eſſe multiplices rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio plani X ad planum T, quam rationes partiales ex quibus conſtituitur ratio ſolidi A C ad ſol. D F, ſunt multiplicatæ rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio ſol. G H ad ſol. I K.

Intelligantur ſolida quatuor A C, D F, G H, I K diuiſa per inſcriptionem paralelopipedorum, quemadmodum eadem diuiſa fuere in propoſ. 40, ante demonſtrata: & quia quantitates quæuis datæ corpora vel ſuperficies diuiſibiles ſunt per inſcriptionem ſiue corporum ſiue figurarum planarum, quemadmodum aliæ datæ quantitates per inſcriptionem

 diuiſæ



diuiſæ ſunt;intelligantur ſpatia hyperbolica V, S, X, T per figurarum irſcriptionem ita diuiſa,prout ſolida AC, DF, GH, IK diuiſa ſunt per inſcriptionem paralelop. &,vtraque per ſimilem inſcriptionem exhauriri. cum igitur rationes figurarum inſcriptarum planis hyperbolicis V, S, X, T, ſint rationes partiales ex quibus conſtituuntur rationes totales planorum V ad S, X ad T: rationes item paralelopip. inſcriptorum ſolidis AC, DF, GH, IK, ſint rationes,partiales ex quibus conſtituuntur rationes totales ſolidorum AC ad DF, & GH ad IK; inſuper ex hypotheſi ratio totalis planorum V ad S tam multiplex ſit rationis totalis X ad T, quam ratio totalis ſolidorum AC ad DF, eſt multiplicata rationis totalis ſol. GH ad IK, manifeſtum eſt rationes partiales conſtituentes rationem totalem plani V ad S, tam eſſe multiplices rationum partialium conſtituentium totalem plani X ad T, quam rationes partiales conſtituentes rationem totalem ſolidi AC ad ſol. DF, multiplicatæ ſunt rationum partialium conſtituentium rationem totalem ſol. GH ad ſol. IK.

Vlterius,intelligantur duo ſolida vltima LM, NO diuiſa per inſcriptionem paralelopip. vti factum in propoſ.40, ante demonſtrata: dein aſſumantur duo plana hyperbolica Y & Z rectis alteri aſymptotorum paralelis incluſa, quæ per inſcriptionem figurarum eo modo ſunt diuiſa & exhauſta,quo duo ſolida LM, NO, per inſcriptionem paralelop. diuiſa ſunt & exhauſta.

Dico rationem totalem planorum hyperbolicorum X ad T, tam eſſe multiplicem rationis totalis planorum Y ad Z,quam ratio totalis ſolidorum GH ad IK, multiplicata eſt rationis totalis ſol. LM ad NO.

Quoniam plana duo X & T ſimili figurarum inſcriptione diuiſa & exhauſta ſunt, quâ per inſcriptionem paralelopip.diuiſa & exhauſta ſunt ſolida duo GH, IK, idemque factum ponatur tam in planis hyperbolicis Y & Z, quam in ſolidis LM, NO, rationes inſuper quæ reperiuntur inter figuras inſcriptas planis hyperbolicis X, T, Y, Z, ſint partiales illæ ex quibus conſtituuntur totales eorundem planorum,& rationes quæ reperiuntur inter paralelop.inſcripta ſolidis GH, IK, LM, NO ſint

par-

partiales illæ ex quibus conſtituuntur totales rationes eorundem ſolidorum, palam eſt rationes partiales ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum hyperbolicorum X ad T, tam eſſe multiplices rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum Y ad Z, quam rationes partiales ex quibus conſtituitur ratio totalis ſolidorum GH ad IK multiplicatæ ſunt rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis ſolidorum LM, NO. quia vero tam plana illa hyperbolica, X, T, Y, Z, quam ſolida GH, IK, LM, NO, per ſimilem figurarum & corporum inſcriptionem continuatam, ſimul exhauriuntur, atque eadem ſemper rationum partialium (ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum X, T) ad rationes partiales (ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum Y, Z) eſt proportio quoad multiplicitatem, quæ eſt rationum partialium (ex quibus conſtituitur totalis ratio ſolidorum GH, IK) ad illas partiales (ex quibus conſtituitur ratio totalis ſolidorum LM, NO) quoad multiplicationem, manifeſtum eſt rationem totalem planorum X ad T, tam eſſe multiplicem rationis totalis planorum Y ad Z, quam ratio totalis ſolidorum GH ad IK, multiplicata eſt totalis rationis ſolidorum LM ad NO.

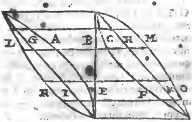
Hinc patet 1. grauiter erraſſe illos, qui ex eo, quod rationes omnes partiales ex quibus conſtituitur totalis ratio ſolidorum AC ad DF, toties ſint multiplicatæ rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis ſolidorum GH ad IK, quoties hæ ipſæ rationes partiales multiplicatæ ſunt earum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis ſol. LM ad NO, inferebant rationem totalem ſol. AC, DF, toties eſſe multiplicatam rationis totalis ſol. GH, IK, quoties hæc ipſa ratio multiplicata eſt rationis totalis ſol. LM, NO; id enim nullo modo ſequitur, ex eo quod omnes rationes partiales ſint diuerſæ.

Patet 2. ex eo quod rationes partiales ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum hyperbolicorum V & S ſint tam multiplices earum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum X & T, quam hæ ipſæ rationes partiales, ſunt multiplices rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis planorum Y & Z, ex eo nunquam non ſequi, rationem totalem planorum V & S tam eſſe multiplicem rationis totalis planorum X & T, quam hæc ipſa eſt multiplex rationis totalis planorum Y & Z; quia omnes rationes partiales ſunt diuerſæ, nec eandem proportionem continuant, ſed ſemper diuerſam.

Illud igitur tantum ex prædictis ſequitur, rationem totalem ſolidorum AC, DF, tam eſſe multiplicatam rationis totalis ſolidorum GH, IK, quam ratio totalis planorum hyperbolicorum V & S, multiplex eſt rationis totalis planorum hyperbol. X & T: & rurſum, rationem totalem ſolidorum GH, IK, tam eſſe multiplicatam rationis totalis ſolidorum LM, NO, quam ratio totalis planorum X & T multiplex eſt rationis totalis planorum Y & Z.

PROPOSITIO XLIV.

Lib. 10. oper. Geom.



ESto eadem figura quæ prius. Dico notam eſſe rationem ſolid. L M ad ſolidum N O.

PEr Scholion præcedens, ratio ſolidi G H ad ſol. I K, tam multiplicata eſt rationis ſolidi L M ad ſolidum N O, quam ratio plani hyperbolici X ad planum T, (vide fig. ſcholij præced.) eſt multiplex rationis plani hyperb. Y ad plan. Z: ſed notum eſt (cum facile deduci poſſit ex proprietatibus ſpatiorum hyperbolicorum, quas Auctor lib. 6. accuratè demonſtrauit) quam multiplex ſit ratio planorum hyperbol. X ad T, rationis planorum Y ad Z; igitur & notum eſt, quam ratio ſol. G H ad I K multiplicata ſit rationis ſolid. L M ad N O. nota autem eſt ratio ſolidi G H ad ſol. I K, igitur & nota eſt ratio ſolidi L M ad ſolidum NO, quod erat demonſtrandum.

Vlterius in hac quadratura non procedo, quod ſtabilita hac propoſitione, omnino ſibi illa conſtet: quod vnicè in hoc libro ſpectant: ex quo patet, quantum à vero ac genuino illius ſenſu & Auctoris mente aberrarint omnes, qui primam ad examen qui vocarunt.

PARS SECVNDA.

Reſpondetur variorum obiectionibus.

RESPONSIO I.

Ad Cenſorem A A.

AN prima Auctoris quadratura, abeat in illud à Merſennio mutuatum problema, *datis tribus quantitatibus ſiue rationalibus ſiue irrationalibus, datiſque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè inuenire.*

Vix

Vix opus Geometricum in lucem prodierat, vix Galliæ primos limites attigerat, cum ecce Tibi obuiam à Merſennio cenſuram, quâ libri titulum, & ſcopum, quâ doctrinam in illo contentam, ipſumque adeo operis Auctorem grauiter cenſet; atque inter alia (quorum ſingula ſpeciali deinceps capite examinabo) aſſerere non dubitat, *in illud Auctoris quadraturas abire necdum ſolutum problema, quodque forſitan longè difficiliorem, quam ipſa quadratura ſolutionem requirit: datis tribus quantitatibus, ſiue rationalibus ſiue irrationalibus, datiſque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè inuenire.*

Merſennium ſecutus Cenſor A A, contendit propoſ. 44. quadraturæ primæ, ac omnes deinde Auctoris quadraturas, ad idem tandem Merſennij problema reduci; iuuat ipſa Cenſoris verba audire:

Hanc propoſitionem, inquit, (id eſt 44.) doctiſſimè & verè geometricè reduxit, nunquam ſatis laudandus aut lugendus Merſennius in ſua cenſura, approbante toti orbi cognito, inſigni geometra Æ. R (quem vbique ſub titulo noſtri geometra in ſuis operibus indigetat) ad illud problema, datis tribus quantitatibus &c. cum enim datæ ſint ex hypotheſi duæ rationes, ſi reducantur ad tres terminos, aſſumptis vt fieri ſolet ad libitum, duorum logarithmis, quorum proinde differentia nota ſit, tertij logarithmus inueniendus eſt, vt differentia inter alios logarithmos nota ſit, & proinde proportio inter has rationes, quæ eſt eadem cum ratione inter differentias logarithmorum, ſeu vt notum ſit, quoties vna ratio aliam contineat.

Et infra: *reducuntur omnes (ſcil. quadraturæ) ad illud problema, datis duobus logarithmis, tertium proportionalem inuenire, ac tandem ad problema Merſennij.*

Rurſum dum cenſet propoſ. 65. lib. 10. *hæc, inquit, reducitur quoque ad problema Merſennianum, qui parum curauit de erroribus inquirendis, cum ſtatim in omnibus quadraturis occurrerent propoſitiones, dependentes à problemate æquè difficili ac ipſa circuli quadratura.*

Denique vbi idem ſæpius inculcauit, ita concludit: *antequam finiam, aliquid addendum de prima parte cenſuræ P. Saraſſæ: monendo lectores, in eo erraſſe, quod putauerit quantitatum irrationalium, aut earum, quæ extra ſeries exiſtunt, non dari logarithmos; vnde quam immeritò doctiſſimum Merſennium redarguerit, quod problema quaſi homo non geometra, parum geometricè propoſuerit, ſatis manifeſtum eſt; quamque peritos geometras ſe prodant, qui aut nihil ad quadraturas pertinere putabant Cenſuram Merſennianam, aut ipſam vt parum geometricam contemnebant: qui enim veram rationum naturam intellexerit, facilè videbit ad ipſum reduci quadraturas Gregorianas; qui vero quidquam in logarithmorum ſcientia intellexerit, problema rectè propoſitum non poteſt non agnoſcere.*

Verum cuiuſmodi hæc ſint, modo videamus, cenſuramque in partes diuiſam, ſingillatim excutiamus.

Aſſerit Cenſor 1. propoſitionem 44. lib. 10. doctiſſimè & verè geometricè à Merſennio reductam ad illud problema *datis tribus quantitatibus* &c. Certum eſt propoſitionem 44. iuxta Auctoris mentem, & genuinum ſenſum, quem paulo ante dedimus, intellectam, nec reductam eſſe neque porro reduci poſſe ad illud Merſennij problema, quocunque dæmum modo hoc explicetur: aſſerit enim illa rationem duorum vltimorum ſolidorum L M, N O (vid. fig. ſcholij præced.) notam eſſe ex eo, quod notum ſit quoties ratio ſolidorum ſecundorum G H, I K multiplicata ſit rationis ſolid. L M, N O, & inſuper nota ſit ratio ſolid. G H ad I K ſe-

cundum ſuam quantitatem. Problema autem petit, *datis tribus quantitatibus &c. datiſque duarum logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè exhibere:* quæ duo non modo commune nihil habent, ſed nec affine; neque hoc vt opinor negabit ipſe Cenſor, cum propoſ. 44. alio longè & à priori ſenſu, diuerſo intellexeriticum igitur tota primæ quadraturæ moles prædictæ propoſitioni, iuxta auctoris mentem explicatæ innitatur, euidens eſt, neque primam quadraturam ad problema illud Merſinnianũ reductam eſſe, neque reduci poſſe: contendit igitur Cenſor propoſ. 44. prout illam ipſe & Merſennius intellexit, ab hoc ad prædictum problema reductam eſſe: at illam perperam à Cenſore & aliis intellectam, falſumque illi affingi ſenſum, toto cælo ab Auctoris mente & rei veritate alienum, oſtenſum eſt præcedenti ſcholio: nil igitur ad rem facit, quidquid de illa egerit Merſennius; quia tamen id ſæpius inculcat Cenſor, non pigebit hic oſtẽdere, propoſitionem 44. nequidem eo quo volunt ipſi ſenſu intellectam, à Merſennio ad prædictum problema de tribus quantitatibus &c. reductam eſſe, aut reduci poſſe: ſenſus autem eſt huiuſmodi: *nota eſt ratio duorum primorum ſolidorum, nota item ratio ſecundorum, vtpote quæ cubata ſint, igitur notum eſt quoties ratio duorum primorum ſolidorum, contineat rationem ſecundorum, ſed quoties primorum ratio continet rationem ſecundorum, toties hac ipſa continet rationem vltimorum, igitur & horum ratio nota eſt, atque huius propoſitionis ſolutio, dependet ab hac, imo eadem eſt propoſitio, aliter propoſita: datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hac ipſa multiplicat tertiam, oporteat tertiam rationem notam facere; igitur & hac etiam reducta eſt ad problema Merſennianum datis tribus quantitatibus ſiue rationalibus ſiue irrationalibus, datiſque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum geometricè inuenire.*

Atque hoc à Merſennio factum eſſe, ſic oſtendit Cenſor: *datæ ſunt, inquit, ex hypotheſi* (in propoſ. 44 & in prædicto problemate, quod cum 44. coincidit) *duæ rationes, ſi illæ reducantur ad tres terminos, aſſumptis vt fieri ſolet ad libitum, duorum logarithmis, quorum proinde differentia nota ſit, tertij logarithmus inueniendus eſt &c. vt notum ſit, quoties vna ratio alteram contineat.*

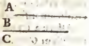
A
B 60
C 20

Sint igitur A. B. C. tres termini ad quos reductæ intelligantur duæ rationes ab Auctore datæ: quid deinde? aſſumantur, inquit, vt fieri ſolet ad libitum, duorum v.g. C, B, logarithmi qui ſint v.g. 20. & 60. factum eſto. quid vltra? inueniendus eſt logarithmus tertij, vt notum ſit quoties vna ratio alteram contineat. at quid ſi tertius ille terminus, in nulla ſit ſerie in qua reperiuntur B & A? tunc certè illius logarithmus exhiberi non poterit, vt rectè (quidquid dicat Cenſor,) demonſtrat P. Saraſſa, & nos infra ad aſſert. 3. oſtendemus. Deinde fruſtra logarithmi ad hoc adhibentur vt notum fiat quoties ratio v.g. A C, contineat rationem B C, vel ratio CA contineat rationem CB, cum abſque illis vniuerſaliter id innoteſcere poſſit per hyperbolam ſiue A ſit in eadem ſerie cum B & C ſiue nõ, quod per logarithmos fieri non poteſt.

Sed eſto, vt in logarithmis hæreamus, ſit A in eadem ſerie in qua ſunt B & C, & inueniendus ſit illius logarithmus, vt notum ſit quoties vna ratio contineat aliam. quid inde concluditur? an quod propoſ. 44. Auctoris, aut problema illud quod cum 44. coincidere & idem eſſe dixi, ad Merſennianum reductum ſit? perridiculum; age videamus vtriuſque

proble-

problematis data, & quid in vtroque exhiberi poſtuletur, & ilico patebit ingens diſcrimen, & immanis diſſimilitudo.



Datæ ſunt in problemate Merſennij, tres quãtitates v.g. A, B, C quæcunque, & duarum ex illis v.g. B, C logarithmi: hoc eſt numeri exponentes quotæ ſint B & C in ſua ſerie; ſiue datur, quod notum ſit quoties ratio primæ proportionalis, ſeriei in qua ſunt B & C, ad ipſum C, contineat per multiplicationem, rationem eiuſdem primæ ad ſecundam in eadem ſerie; item quoties ratio eiuſdem primæ ad ipſum B, multiplicet rationem eiuſdem primæ, ad eandem ſecundã: tum petitur exhiberi geometricè, quota ſit A in eadem ſerie, ſiue quoties ratio primæ proportionalis eiuſdem ſeriei, ad ipſum A, multiplicet rationem eiuſdem primæ ad ſecundam: quo exhibito, ſolutum eſt problema Merſennij, nec quidquam ex eo vlterius infertur aut ſequitur.

Alterum problema, ita proponitur: *datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties ſecunda multiplicat tertiam, oportet tertiam notam reddere.* datur igitur in hoc problemate, quod notæ ſint duæ rationes (non ſolum quoad quantitatem ſuam, ſed etiam quoad mutuam multiplicationem) datur inſuper, quod quoties prima multiplicat ſecundam, toties hæc multiplicet tertiam: tum petitur nota reddi tertia illa ſecundum ſuam quantitatem.

Nunc fidem veſtram & æquum iudicium appello, quotquot eſtis toto orbe Geometræ, quid iſti Merſenniano problemati, cum hoc, non modo commune aut affine, ſed quid vel in ſpeciem ſimile, imo quid non in illis diſparatum, inconiungibile, & toto diuerſum cælo? in illo, dati ſunt duarum quantitatum, C, B, logarithmi; hoc eſt, notum eſt quotæ illæ ſint in ſua ſerie, in hoc datæ ſunt duæ rationes, eæque notæ, tam quoad quantitatem ſuam, quam quoad mutuam multiplicationem: in illo tertia quantitas datur, & petitur exhiberi quota ſit in ſua ſerie: in hoc petitur nota reddi tertia ratio ſecundum ſuam quantitatem; in illo tertia quantitas nullam aliam determinationem habet, quam quod ſit in eadem ſerie cũ duabus aliis; in hoc, tertia ratio eam habet determinationem, quod illam toties multiplicet ſecunda ratio, quoties hanc ipſam multiplicat prima. illo ſoluto, nil infertur aut ſequitur; hoc vero vniuerſaliter ſoluto, ſolutum quoque eſt problema deliacum; illud Geometricè ſoluit P. Saraſſa, hoc à nullo hactenus Geometricè ſolui potuit, & à multis inter impoſſibilia habetur.

Non igitur propoſitionem illam ad problema illum doctiſſime reduxit Merſennius, cum reduci ne quidem poſſit.

At vrget Cenſor, & problemati Merſenniano (vbi illud recte ſecundum logarithmorum leges ſolutum à Patre Saraſſa, atque adeo nihil ad rem pertinere vidit, ſecus quam exiſtimarat ipſe & Merſennus) nouum ſenſum affingit, vultque illud idem eſſe cum hoc: *datis duobus logarithmis, tertium proportionalem exhibere*: & quia logarithmos cum ſpatiis hyperbolicis quibuſuis male confundit, prædictum problema cum hoc vult coincidere, *datis duobus ſpatiis hyperbolicis, tertium proportionale inuenire*: atque inde, ait, *pendet doctiſſimi Merſennij defenſio.* Sed præterquam quod horum problematum, prius, indeterminatum ſit, & nihil ſignificet, nihil cum Merſenniano habet commune aut ſimile; non enim petit Merſennus datis duobus logarithmis, tertium exhiberi proportionalem, ſed datis tribus quantitatibus quibuſcunque, datiſque duarum ex illis logarithmis,

mis, petit tertiæ, quæ eſt quæcunque, logarithmum exhiberi : quæ duo plane diuerſa eſſe, nemo ignorat qui logarithmorum ſcientiam vel à limine ſalutauit. de altero quod logarithmos ſpatiis implicat hyperbolicis, dicam infra ad aſſerr. 3.

Aſſerit 2. Cenſor, *cognitum toti orbi Geometram*, Æ. R. approbaſſe partem illam Cenſuræ Merſennianæ, quæ dicit Auctoris *quadraturas in illud tandem abire problema, datis tribus quantitatibus* &c. atque adeo etiam propoſ. 44. *doctiſſimè ac verè geometricè ad idem problema ab eodem reductam.*

Equidem de viri illius fama, nihil detractum volo: at cum nulla illius opera (ſi quæ ediderit) videre hic contigerit, adeoque de illius in Geometricis ſcientia iudicare non poſſim, nihil eſt magnoperè cur ipſius auctoritate ſtandum mihi ſit: eorum porro iudicio viri capacitatem qui norunt, credere me ſi velit Cenſor, audiat quid de illo, ad amicum perſcripſerit è Suecia homo Gallus, idem & Algebriſta egregius Renatus Des Cartes: verba huius ſunt ipſiſſima: *Mais ie ſuis a preſent en vn pais ſi eloignie, que ie ne puis pas meſme eſperer d'y voir les eſcrits dout vous me parlez: car outre qu'il ſeroit difficile de les apporter icy, ie n'y aurois pas auſſi beaucoup de loyſir pour les examiner: c'eſt pourquoy ſi vous eſcriuez au R. P. Cregorius à S. Vincentio, ie vous prie de l'aſſeurer de mon tres humble ſeruice, & de luy faire ſçauoir de ma part, que bien que ie n'approuue pas ſa quadrature de cercle, ie ne crois pas neaumoins que le S. Æ. R. ait aſſez d'eſprit pour la refuter, & ainſi que pendant qu'il n'aura point d'aduerſaires plus forts que cetuyla, i'l ne l'uy ſero pas malayſé de, ſe defendre.*

Quæ ita latinè reddo: *ſed modo ſum in regione adeo remota, vt ne quidem ſpes mihi ſit videndi hic ſcripta illa, de quibus ad me ſcribis: & præterquam quod difficile eſſet, illa huc adferre, non multum mihi ſupereſſet otij illa examinandi: quocirca ſi ad R. P. Gregorium à S. Vincentio perſcribas, rogo Te, ſecurum illum obſequi mei vt reddas, atque illi à me ſignifices, quod, licet illius quadruturam non approbem, non credam tamen ſatis ingenij eſſe Domino Æ. R. illam refutandi, atque adeo ſi aduerſarios non habeat fortiores hoc, non fore illi difficile ſe defendere.*

Intelligit iam Cenſor quanti iudicium Æ. R. in quadraturæ argumento faciendum ſit: nil igitur & illius & Merſennij errores, Æ. R. defendit auctoritas.

Aſſerit Cenſor 3. *erraſſe in hoc Patrem Saraſſa, quod putauerit quantitatum irrationalium, aut earum, quæ extra ſeries exiſtunt, non dari logarithmos: ideoque immeritò doctiſſimum Merſennium redarguiſſe, quod problema quaſi homo nō geometra, parum geometricè propoſuerit.*

Quantitatum earum, quæ extra ſeries exiſtunt, non dari logarithmos in illis ſeriebus extra quas eæ ſunt, rectè docuit P. Saraſſa, & iure meritiſſimo Merſennium arguit; eiuſdemque erroris ego & Merſennium & Cenſorem rurſus arguo; & quam non immeritò, mox oſtendam vbi de duobus Cenſorem interrogauero.

Quæro à Cenſore primum, vbi nam Pater Saraſſa dicat, irrationalium quantitatum non dari logarithmos? quâ propoſitione, quâ paginâ, non dico illud aſſerit, ſed vel obſcurè innuit? certum mihi eſt in toto illius tractatu, nil ſimile ab eo dici aut innui, cuius rei tot teſtes ſunt quot lectores.

Quæro 2. dum ait P. Saraſſa in eo errare, *quod putauerit quantitatum irrationalium, aut earum quæ extra ſeries exiſtunt, non dari logarithmos*, quæro

inquam,

inquam,an vnum idemque ſit, quantitates aliquas eſſe irrationales, & quantitates aliquas,extra ſeries continuè proportionalium exiſtere? cui quæſo in mentem vnquam venit, duo illa tam diſparata inter ſe confundere? quis tyro ignorat,dari ſeries continuè proportionalium, quarum termini omnes inter ſe ſunt in cõmenſurabiles? quis neget datâ ſerie terminorum commenſurabilium continuè proportionalium, dari poſſe quantitatem illis commenſurabilem,quæ tamen extra totam illam ſeriem exiſtat? legantur ea quæ hac de re acutè ſcripſit P. Saraſſa. aliud igitur eſt quantitates eſſe irrationales,aliud quantitates, extra ſeries aliquas continuè proportionalium exiſtere. irrationalium, ſi in eadem continuè proportionalium reperiantur ſerie,dari logarithmos nemo dubitarit, neque id uſpiam negauit P. Saraſſa. at quantitatum ſeu rationalium ſeu irrationalium,quæ extra ſeries exiſtunt, non poſſe dari logarithmos in illis ſeriebus à quibus ſunt excluſæ, veriſſimè aſſeruit & idem ſic oſtendo.

Logarithmi nil aliud ſunt,quam exponentes magnitudinũ continuè proportionalium; ſiue ſunt numeri, qui oſtendunt quoties ratio primæ proportionalis ad ſecundam, contineatur per multiplicationem in ratione eiuſdem primæ ad quamcunque proportionalium in eadem ſerie. ſit v:g. ſeries geometrica continuè proportionalium A; & alia Arithmetica B. totidem conſtans terminis, qui ſinguli, ſingulis ſeriei A correſpondeant: numeri qui ſunt in ſerie arithmetica B dicuntur logarithmi: ita Neperus, Briggius, Gunterus, Keplerus, Hention, Herigonius &c. ex quo.

A	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
B	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Manifeſtum eſt iuxta prædictos Auctores, illarum quantitatum,quæ extra ſeries continuè proportionalium exiſtunt,non dari logarithmos in illis ſeriebus, extra quas exiſtunt: nam præterquam quod neque à prædictis auctoribus,neque ab vllo deinceps, talium quantitatum vnquam logarithmi exhibiti ſint,aut dari poſtulati, admiſsâ logarithmorum definitione, quam primi illorum inuentores dedere, & reliqui omnes admiſere, euidens eſt nullo modo dari poſſe.

Sint enim tres quantitates A, B, C, & C quidem in nulla exiſtat ſerie, in qua ſunt A & B, certum eſt per numeros exponi non poſſe quoties ratio A ad B per multiplicationem contineatur in ratione A ad C, aut quota ſit quantitas C in vlla ſerie in qua reperiuntur A B, cum ex hypotheſi in nulla illarum ſit: qui igitur quantitatis C logarithmus dari poterit in ſerie in qua ſunt A & B, cum illius munus ſit exhibere, quota ſit C in ſerie, in qua ſunt A B, aut quoties ratio A ad B per multiplicationem contineatur in ratione A ad C, quorum neutrum in illa hypotheſi fieri poteſt? rectè igitur dixit P. Saraſſa earum quantitatum, quæ extra quaſdam ſeries continuè proportionalium exiſtunt, non dari logarithmos, in illis ſeriebus, neque porro dari vllo modo poſſe: cuius oppoſitum dum Cenſor aſſerit, & P. Saraſſa erroris arguit, eadem operâ doctiſſimos viros, Neperum, Gunterum, Briggium, alioſque logarithmorum anteſignanos, quibus eadem cauſa eſt, erroris condemnat: ex quo patet, Patrem Saraſſa iure meritiſſimò redarguiſſe Merſennium, quod problema, parum geometricè propoſuerit.

A B C

At quo tendat Cenſor intelligo; logarithmos cum ſpatiis confundit hyperbolicis, & hæc ipſi quæcunque ſint, logarithmorum veniunt nomine: & quia hyperbola ad eas quoque ſe extendit quantitates, quæ extra ſeries continuè proportionalium exiſtunt, indefinitè pronunciat,

 eiuſmodi

eiuſmodi quantitatum dari logarithmos.

Totam logarithmorum ſcientiam in hyperbola exhiberi, veriſſimum eſt (atque illud non alio è fonte quam ex Auctore operis Geom. & P. Saraſſa didicit Cenſor) item hyperbolam ad eas quantitates ſe extendere, quæ extra ſeries exiſtunt adeoque logarithmorum ſcientiam eſſe particularem, eam vero quæ ex hyperbola petitur, vniuerſalem, in confeſſo eſt. at ſpatia hyperbolica indiſcriminatim logarithmorum ſubire locum, vti ex ipſa logarithmorum definitione, & illorum munere ab Auctoribus aſſignato, falſum eſt, ita hæc indefinitè logarithmorum appellare nomine, error longè eſt grauiſſimus.

Porro illa tantum ſpatia, logarithmorum vices ſupplere poſſunt, quæ inter ſe commenſurabilia ſunt; quia tum nimirum ſpatia faciunt progreſſionem arithmeticam, & lineæ, ſpatia illa terminantes, ſunt in progreſſione geometrica: ſecus fit in ſpatiis incommenſurabilibus, quæ cum non habeant ſe vt numeri, & lineæ illa terminantes non ſint proportionales geometricè, nullâ ratione eſſe aut dici poſſunt logarithmi; niſi totam logarithmorum ſcientiam quæ hucuſque in vſu fuit deſeras, illiuſque leges omnes & naturam, definitionemque inmutes.

Sed age, & demus ſpatia hyperbolica quæcunque illa ſint, logarithmorum venire nomine, & horum munus poſſe ſupplere; videamus quem ſenſum in falſa hac hypotheſi Merſennij admittat problema; atque, an, & qua ratione Merſennij problema *datis tribus quantitatibus &c.* ad hoc reduci poſſit, *datis duobus ſpatiis hyperbolicis, tertium proportionale inuenire*: porro cum à Merſenno datæ tres quantitates, ſint quæcunque, intelligatur eſſe tria ſpatia hyperbolica A. B. C. à rectis alteri aſymptotorum paralelis intercepta; vt ſenſus ſit, *datis tribus ſpatiis hyperbolicis quibuſcunque A. B. C. datiſque duorum ex illis, nimirum, A & B, logarithmis* (hoc eſt notum ſit, quantum ratio alicuius Z ad B. multiplicet rationem eiuſdem Z ad A. alium enim ſenſum fingere non poſſum) *oportet tertij, nimirum C, logarithmum geometricè exhibere* (id eſt oportet notum facere, quantum ratio Z ad C multiplicet rationem Z ad B) at quid problemati illi ſic intellecto commune aut affine eſt cum hoc, *datis duobus ſpatiis hyperbolicis, oportet tertium proportionale exhibere*: in illo, tertium ſpatium datum eſt; & eſt quod non in hoc, tertium datum non eſt: in illo, petitur exhiberi, quantum ratio Z ad tertium C, multiplicet rationem Z ad ſecundum B: in hac petitur exhiberi tertium ſpatium, non qualecunque, ſed duobus datis proportionale. illius ſolutio facillima eſt, & à qua dependet omnino nihil: huius vero difficillima, & vniuerſaliter propoſiti, abſque meſolabio dari non poteſt: Nullâ igitur ratione Merſennij problema (etiam contra naturam ad ſpatia hyperbolica reductum) idem eſt, vel coincidit, vel reduci poteſt ad hoc problema, *datis duobus ſpatiis hyperbolicis, tertium proportionale exhibere*; vnde fruſtra ab hoc Merſennij petitur defenſio.

Aſſerit Cenſor *illos parum peritos geometras ſe prodere, qui aut nihil ad quadraturam pertinere putant Cenſuram Merſennianam, aut ipſam vt parum geometricam contemnunt.*

Geometrica igitur eſt cenſura Merſenni: at quâ ratione? de geometricis nimirum, & de ipſa quadratura pronunciat, an demonſtrat? nihil minus: non igitur geometrica eſt Merſennij cenſura: *abſurdum enim, inquit, Serenus, Geometram de problemate geometrico ſine demonſtratione quidquam affirmare*, at Geometra is fuit Merſennus, cuius aſſertio, præſertim à noto toti orbi geometra Æ. R. approbata, fidem facit de Geometra illo paulò

ante

ante dixi:de Merſennio,ex eorum litteris didici,qui æque ac ipſe Cenſor illi fuere obnoxij; illum iſtic pro magno Geometra à nemine fuiſſe agnitum,neque ipſum ſe pro tali habuiſſe; at rectè de quadratura Auctoris iudicauit, lectoreſque de erroribus in illâ contentis,& de aliis monuit,de quadraturæ erroribus dictum eſt in præcedentibus,de cæteris quas cenſura illa continet admonitionibus, videbimus cap. vltimo: illud hic à Cẽſore quæro,qui rectè de quadratura,vix obiter inſpecto opere, iudicare potuit is,quem nullum aut certè tenuem fuiſſe Geometram, teſtantur iſtic omnes,quotquot hominem norunt, loquuntur opera ab ipſo edita, & tu ipſe non diffireris? certè non rectè de quadratura iudicauit ille, qui ne iudicare quidem potuit. at Cenſura ad quadraturam ſaltem pertinet, quia docet,in quod problema ipſâ quadraturâ difficilius,hæc abiat. problema illud feliciter & geometricè ex Auctoris principiis ſoluit P. Saraſſa: vnde ſi in illud quadratura deſinat, aut ab eo dependeat, vos inde quadraturam ſoluite, & fateamini problema ex Auctoris principiis ſolutum eſſe,ipſâ quadraturâ difficilius. porro Auctoris quadraturam, aut propoſitionem aliam à qua hæc dependeat,in Merſennianum illud abire problema,aut ad hoc reductam eſſe,aut reduci poſſe, falſum oſtendi primâ parte huius reſponſionis. non igitur Geometrica eſt Cenſura Merſennij,aut ad quadraturam vllo modo pertinet:

DIGRESSIO.

De ſolutione problematum Mechanica, Conica, Geometrica.

CVm ſæpius in præcedenti reſponſione, & problematis Merſenniani, & ſolutionis à P. Saraſſa datæ meminerim:atque à nonnullo hanc argui intelligam quaſi minus Geometricam, placuit hic paucis oſtendere, quid triplicem inter problematum ſolutionem interſit,atque ſolutionem à P.Saraſſa datam,ab impoſtura vindicare.

Duobus potiſſimum modis, problematis ſolutio à ſtricta geometria deficere poteſt. vno quidem, ſi conſtructio ſit organica; altero ſi fuerit conica: conſtructio organica eſt, quando in ea aliquid determinatur, aut aliqua operatio iubetur fieri, per inſtrumentum mechanicum, vel per motum: talis eſt conſtructio quam Pappus & Hero adhibent ad duplicandum cubum, ſeu ad inueniendas duas medias proportionales, inter duas datas, ad propoſ.5.lib.3.Collectionum; item illa, quâ Eratoſthenes & Nicomedes ad idem ſoluendum problema vtuntur. Conchoidis item Nicomedis,& Ciſſoides Dioclis, quæ eadem eſt cum illa, quam Pappus ad duplicandum cubum per motum regulæ cuiuſdam deſcribit, ad propoſ.5.lib.3. denique ſpiralis Archimedis, & quadratrix Dinoſtrati, & ſexcentæ aliæ. de quibus ita Pappus lib.8. Collectionum ad propoſ.11. *Organicæ autem multæ ſunt ſpecies & partes; alia enim à Mechanica,& gnomonica, & ea tractatione,quæ circa aquas verſatur,ratione conſideratâ, per inſtrumenta ab ipſa confecta demonſtrantur; multa vero & ſeorſim à Mechanicis, extrinſecus ab ea perficiuntur,& nonnulla (quæ Geometricis rationibus, non facilè tractantur) aſſumens, inſtrumentis ad faciliorem conſtructionem perduxit: ſtatim igitur problema quod Deliacum appellatur, cum natura ſolidum ſit, fieri non poteſt vt geometricis rationibus innixi conſtruamus; inſtrumentis autem mulatum in ma-*

nuum

nuum operationem & conſtructionem magis idoneam, ea quæ ab aliis expoſita eſt, ſic reducetur propoſitum &c.

Conſtructio conica eſt, quando in ea aliquid determinatur, vel aliqua iubetur fieri operatio, per ſectiones conicas: talis eſt conſtructio propoſ. 138. libri de hyperbola Auctoris, in qua punctum E in circulo determinatur per hyperbolam: item conſtructio propoſitionis (quæ habetur in ſcholio ad propoſ. 162.) in qua punctum D in hyperbola determinatur per interſectionem parabolæ.

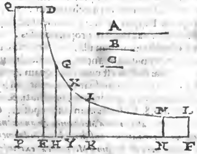
Conſtructio Geometrica eſt, in qua nihil determinatur, aut nulla iubetur fieri operatio, niſi per lineam rectam aut circulum.

Hinc ſequitur 1. de ſectionibus conicis dari problemata, quæ Geometricè ſoluantur: qualia ſunt quatuordecim Apollonij problemata, quæ in duobus primis libris proponuntur, quæ cum in conicis verſentur, geometricè nihilominus ſoluta ſunt, quia in illorum conſtructione nihil per conica determinatur, aut nulla per eadem fit operatio, ſed per ſtrictam geometriam.

Sequitur 2. in Mechanicis quoque varia poſſe proponi problemata, quæ Geometricè ſoluantur, ſi nimirum in illorum conſtructione, nihil per motum aut inſtrumentum organicum determinetur, aut vlla inſtituatur per motum aut inſtrumentum operatio.

Sequitur 3. Geometricæ problematis ſolutioni nullo modo officere, ſi vel in demonſtratione aſſumantur ſectiones conicæ, vel illarum proprietates demonſtratæ, vel in demonſtratione oſtendatur, puncta quædam per lineas rectas aut rectangula geometricè in conſtructione determinata, eſſe v.g. ad ellipſim vel parabolam, vel hyperbolam, imo ad ſpiralem vel quadratricem: cuius deinde proprietates in demonſtratione aſſumuntur; quia illis poſitis, tota conſtructio adhuc manet geometrica, quod ſolum ad Geometricam ſolutionem problematis requiritur. ſic Archimedes per ſpiralem, Dinoſtratus per quadratricem, dimenſionem circuli geometricè dediſſet, ſi tangentem ille, hic interſectionis punctum geometricè determinaſſet.

Videamus modo an conſtructio quam P. de Saraſſa adhibet ad ſolutionem problematis Merſenniani, vllâ in parte à ſtricta deficiat Geometria.



Sint, inquit, hyperbolæ aſymptoti P Q, P F, angulum rectum continentes: fiatque vt B ad A, ita P H ad P K, vtque C ad A ita P H ad P F; aſſumptis deinde rectis A, B, C, erigantur orthogonaliter ex punctis H, K, F, vt rectæ HG, KI, FL, æquales ſint lineis A, B, C: tum demonſtrat puncta G, I, L eſſe ad hyberbolam. aduerte in hac prima conſtructionis parte, non aſſumi ſectionem conicam, aut iuberi illam deſcribi, ſed aſſumi lineas P Q, P F rectum angulum continentes, & per rationes geometricas determinari in illa-

in illarum vna P F, quædam puncta ex quibus normales eriguntur, quæ etiam geometricè determinantur: tum deinde in demonſtratione oſtendi, puncta extrema illarum normalium eſſe ad hyperbolam, cuius aſſymptoti ſunt rectæ P Q, P F.

Pergit deinde: *ponuntur autem lineæ A, B, C, hoc eſt G H, I K, L F eſſe in eadem ſerie alicuius rationis, igitur commenſurabiles ſunt ſuperficies G K, K L, communem igitur habent menſuram illæ ſuperficies, quæ per octauam inuenta ponatur eſſe ſuperficies N L.* porro propoſitio octaua, huiuſmodi continet problema (vid. Fig. P. Saraſſæ) *poſitis A B, B C aſſymptotis hyperbolæ D F H, vni eorum conſtituantur æqui diſtantes rectæ D E, F G, H C continentes ſegmenta commenſurabilia, D G, G H: oportet horum ſegmentorum communem maximam menſuram exhibere.* problema autem hoc licet in materia verſetur conica, geometricè tamen ibidem ſolutum eſt, cum in illius constructione nihil determinetur, aut nulla iubeatur fieri operatio per conica, vt legenti patet; igitur nec ex hac parte conſtructio problematis de qua eſt quæſtio, à ſtricta deficit Geometria.

Rurſum ſic procedit: *inuentâ igitur P Y, mediâ inter P H, & P K, erigatur Y X, normalis ad P F & c. erit Y X ad hyperbolam G I L, eritque ſuperficies G Y æqualis Y I ſuperficiei.* nulla hic iterum per conica fit determinatio, cum inter duas quaſuis rectas, geometricè media exhiberi poſſit proportionalis. eodem modo determinatur punctum D, & oſtenditur eſſe ad eandem hyperbolam G, I L.

Quartum & vltimum, *fiat vt numerus partium in quas diuiſa eſt ſuperficies G K, hoc eſt 2, ad numerum partium in quas diuiſa eſt ſuperficies I F, hoc eſt 4, ita differentia logarithmorum 6 & 10, quæ eſt 4, ad quartum numerum, ſcil. 8; & diuidatur differentia logarithmorum A & B, vt eſt diuiſa ſuperficies G K, nempe bifariam & c.* quid hic rurſum vel in ſpeciem conicum eſt, aut à ſtricta Geometria deficit? cætera vero omnia eiuſdem problematis demonſtratiua cum ſint, neque ad conſtructionem pertineant, manifeſtum eſt ex nullo capite ſolutionem à P. Saraſſa datam, ageometricam aut conicam eſſe, aut à ſtrictiſſima deficere geometria.

Porro ad pleniorem doctrinæ huius intelligentiam, vlterius placet indagare, cur illa tantum Geometrica ab antiquis dicta ſit ſolutio, cuius conſtructio per lineas rectas & circulum inſtituitur; eæ vero determinationes, quæ per ſectiones fiunt conicas, à ſtricta excludantur Geometria. Pro qua re

Notandum eſt ex Pappo lib. 3. collect. ad propoſ. 4. problematum Geometricorum, ab antiquis tria genera eſſe ſtatuta; & eorum alia quidem plana appellari, alia ſolida, alia linearia; quæ igitur per rectas lineas & circuli circumferentiam ſolui poſſunt, merito plana dicuntur, quia lineæ per quas eiuſmodi problemata ſoluuntur, in plano ortum habent: problemata vero quæcunque ſoluuntur, aſſumptâ in conſtructione aliquâ coni ſectione, vel pluribus, ſolida appellantur; namque ad conſtructionē neceſſe eſt ſolidarum figurarum ſuperficiebus, nimirum conicis vti. reſtat tertium genus, quod lineare appellatur; lineæ enim aliæ præter iam dictas, in conſtructionem aſſumuntur, varium & tranſmutabilem ortum habentes, quales ſunt helices & quas græci τετραγωνίζουσας appellant.

Sed quare problematum planorum ſolutiones, Geometricæ dicuntur, aliæ vero non item? an quia rectæ lineæ, & circularis definitiones, in geometricis elementis traduntur, conicarum autem nulla fiat mentio? nullo modo; alias enim, vt rectè Souerus, nil geometricum cenſendum

eſſet, præter elementa; quod æque abſurdum, ac ſi quis aſſerat, nihil in phyſicis naturale eſſe, quod elementum non ſit. an quia circuli vnico circini circumductu determinantur, quod in ſectionibus conicis fieri non poſſit? ridiculum. Eutocius certè in ſecundum Archimedis de ſphæra & cylindro, meminit inſtrumenti cuiuſdam, quo parabola vnico ductu deſcribi poteſt, eiuſque inuentionem Iſidoro Mileſio magiſtro ſuo attribuit; hodieque diuerſa à pluribus inſtrumenta excogitata ſunt, quibus non parabola tantum, ſed & cæteræ omnes ſectiones conicæ, omnis generis concinnè deſcribuntur. quid igitur? ego aliam non inuenio cauſam, cur planorum problematum ſolutiones præ cæteris geometricas dixerint, quam quia operationes & determinationes per rectas lineas factæ, omnium primæ ac ſimpliciſſimæ ſint: porrò præter lineas rectas etiam circulum admiſere, quia circulus eſt potentia rectæ lineæ in orbem ductæ, & ex quauis recta linea pro diametro aſſumpta, terminatur circulus, & tota illius quantitas circumſcribitur, ita vt ratio vnius ad alium innoteſcat; quod non perinde fit in conicis, quarum nulla per datum axem determinatur, aut innoteſcit illius ratio ad alteram. dato autem recto latere axeos v.g. parabolæ, determinatur quidem ipſa ſectio, ſed non terminatur, cum in infinitum produci poſſit, adeoque illius quantitas manet indefinita, & cum alia (niſi terminetur) incomparabilis.

Obijcitur à Squero primum: *Elipſis, parabola, hyperbola, æque ac circuli in plano deſcribi poſſunt, igitur & problemata per illas ſoluta, æque ac alia, plana ſunt*: negatur ſequela: non enim plana idcirco problemata dicuntur, quia circulus, per quem ſoluuntur, in plano deſcribitur aut in plano exiſtit; ſed quia ex plano ortum habet, nimirum ex ductu rectæ lineæ (quæ vtique in plano eſt) in orbem; ſectiones autem conicæ, originem ducunt ex cono, & illarum perimetri non in plano, ſed in ſuperficie exiſtunt coni, adeoque ſi impoſſibilis fuiſſet conus, nulla vnquam in rerum natura extitiſſet parabola, aut hyperbola; quod autem illæ in plano iam deſcribi poſſint, poſterius illarum eſt origine, & Geometricè aliter fieri non poteſt, niſi ex illarum proprietatibus, quæ ex cono innotuere.

At vrget: *circulus etiam ex ſolidis ortum ducit, nam & ex ſphæra, ex cono, ex cylindro per ſectiones oritur; quin & triangulum fit ſectione coni per axem, parallelogrammum ſectione cylindri per axem.*

Reſpondeo, negando primum aſſumptum, circulum nimirum ex ſolidis ortum ducere, licet in ſphæra, cono & cylindro exhiberi poſſit. circulus enim, priuſquam Geometrarum vllus ſphæram, conum, aut cylindrum Geometricè contemplatus eſt, aut per plana ſecuit, exiſtebat, & notus erat; exiſteretque etiamſi & ſphæra & conus & cylindrus fierent impoſſibiles, aut nunquam extitiſſent; oritur enim ex ductu in orbem lineæ rectæ; ipſe vero in orbem ductus circum axem, producit ſphæram; ſimiliter triangulum producit conum, & parallelogrammum, cylindrum; adeoque his prior eſt.

Obijcitur à eodem: *cur antiqui geometræ admirati mirificas Theorematum conicorum demonſtrationes ab Apollonio Pergæo prolatas, illi magni Geometræ nomen indidiſſent, ſi ſcientia, in qua verſabatur, Geometricam indicaſſent?*

Reſpondeo, aliud eſſe materiam eſſe geometricam, aliud modum circa illam operandi eſſe geometricum; ſectiones quantum ad materiam eſt geometrica, quia de illo demonſtrationes ſuas facit Geometria; at modus circa illud operandi, ille tantum Geometricus eſt, qui fit per rectas lineas vel

circulum, ob rationes ante aſſignatas. porro Apollonio, magni nomen Geometræ non idcirco datum eſt, quia in materia verſabatur geometrica, ſiue quanta, ſed quia in illa verſabatur Geometricè, ſiue illo modo, quem ſtricta Geometria admittit.

Hinc patet problema deliacum iam olim, vt nonnulli volunt, nulla ratione Geometricè ſolutum eſſe; ſed mechanicè & conicè tantum; prout Auctor oper. Geom. ſoluit l. 6. prop. 136. item 138. & vniuerſaliter ibid. prop. 137.

RESPONSIO II.

Ad R.P. Vincentium Leotaudum S.I.

QVæ contra primam Auctoris quadraturam à R.P. Vincentio Leotaudo, Geometra inſigni, allata ſunt, ad tria potiſſimum capita reuocari poſſunt:

Primo, triplicem adfert ſenſum in quo mutua rationum continentia, dum dicitur prima ratio toties continet ſecundam, quoties ſecunda tertiam, vt adſtruere videbatur propoſ. 44. lib. 10. oper. Geom. ſumi & intelligi poſſet: vel enim ſignificat, primam rationẽ ita ſe habere ad ſecundam, vt ſecunda ſe habet ad tertiam; ita vt volens ex duabus rationibus notis, tertiam notam efficere, ſatisfaciat, exhibendo tertiam rationem proportionalem: vel ſignificat, primam rationem toties per multiplicationem continere ſecundam, quoties ſecunda per multiplicationem cõtinet tertiam: vel denique ſignificat, rationes partiales ex quibus conſtituitur ratio prima totalis, toties eſſe multiplicatas earum rationum partialium ex quibus conſtituitur ratio totalis ſecunda, quoties hæ ipſæ rationes partiales per multiplicationem continent rationes partiales ex quibus conſtituitur ratio totalis tertia.

Secundo, reiectâ primâ interpretatione de rationibus tribus proportionalibus, ſecundam amplectitur; & problema, quo *datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties ſecunda multiplicat tertiam, petitur nota reddi tertia*: ita conatur demonſtrare:

Rationes duæ datæ, ad cõmune conſequens reuocatæ, ſunto rationes A C, B C: inter A & B media proportionalis ſit D: dein duabus D & B tertia reperiatur proportionalis F; denique inter B & F media proportionalis inueniatur E, cui commune detur conſequens C. *dico rationem E C, eam eſſe quæ quæritur.*

A	D	B	E	F
C	C	C	C	C

Demonſtratio: *quia ex conſtructione tres antecedentes A, D, B, ſunt continuè proportionales, ratio A ad B, duplicata erit rationis D ad B: ſed vt D ad B, ita eſt ex conſtr. B ad F, ergo ratio A ad B eſt duplicata rationis B ad F: ſed quia ex eadem conſtructione, tres B, E, F ſunt etiam continuè proportionales, erit etiam ratio B ad F, duplicata rationis E ad F, ſiue B ad E; quare cum rationes A C, B C, E C, quarum idem eſt conſequens C, ita ſe habeant, vt ſe habent antecedentes A, B, E, erit prima ratio A C, duplicata ſecundæ B C, & ſecunda B C duplicata tertiæ E C. duabus igitur datis rationibus A C, B C, tertiam inuenimus E C, quam toties contineat per multiplicationem ſecunda B C, quoties per multiplicationem, ſecundam B C, continet prima ratio A C. quod quærebatur.*

Hâc methodo propoſitioni 44. applicatâ, ex notis duabus rationibus, quatuor primorum ſolidorum notam facit tertiam; determinatque rationem duorum vltimorum ſolidorum, quæ ex ductu partium parabolicarum in ſe ſubalternè, nata ſunt: hinc ad comparationem ſectoris, cum triangulo ſibi inſcripto deuenit: oſtenditque illum, hoc minorem eſſe: quod abſurdum cum ſit, concludit primam quadraturam nullam eſſe.

Tertio, admiſsâ tertiâ expoſitione, negat illam quidquam ad quadraturam pertinere: quia ex illa partialium rationum æquemultiplicatione, nihil de totalibus inferri poſſit: cum illæ non coaleſcant in totales per multiplicationem, ſeu vt æquemultiplicatæ, ſed per additionem & ſubtractionem.

Hactenus vir eruditus; ſed ea quod momentum habeant, reſtat vt excutiamus: pro quo.

2	4	8	16
A 4	C 12	E 8	G 32
B 2	D 3	F 1	H 2

Nota 1. Si fuerint tres vel plures rationes conti ıře proportionales A B, C D, EF, GH, aſſertiones ſequentes de illis verificari, præcisè vt ſunt rationes proportionales, abſtrahendo ab illarum terminis: *Prima*. ratio AB, ducta in rationem EF, producit idem, quod ratio CD, ducta in ſe ipſam; & AB ratio, ducta in rationem GH, producit idem, quod ratio CD, ducta in ratiônem EF. *eſt* 86. *lib. de proport. ſecunda*: ratio AB, eſt ad rationem CD, ſicut ratio CD, ſe habet ad rationem EF; id eſt denominator rationis AB, eſt ad denominatorem rationis CD, ſicut huius denominator, eſt ad denominatorem rationis EF. *Tertia*: ratio EF, tam multiplex eſt rationis CD, quam hæc, multiplex eſt rationis AB: ſiue EF toties continet per additionem, rationem CD, quoties hæc per additionē continet rationem AB. *Quarta*: proportio rationis EF ad rationem AB, duplicata eſt proportionis, rationis CD, ad rationem AB, & proportio rationis GH, ad rationem AB, triplicata eſt proportionis rationis EF, ad rationem CD. *dixi abſtrahendo ab illarum terminis*, hoc eſt conſiderando rationes AB, CD, EF, GH purè vt continuè ſunt proportionales, ſiue interim termini illarum v.g. A, C, E G; item B, D, F H ſint continuè proportionales, ſiue non: quia, quando etiam termini ſunt continuè proportionales, tunc præter iam dictas proprietates, aliæ illis conueniunt.

A	C	E	G	I
1	2	4	8	16
B	D	F	H	K
1	4	16	64	266

Nota 2. Si fuerint rationes plures continuè proportionales, incipiendo à ratione æqualitatis, v.g. AB, CD, EF, GH, IK, præter antedictas proprietates, illis conuenire ſequētes. *Prima*: ratio tertia E ad F, duplicata eſt ſecundæ CD: quarta G ad H, triplicata eſt ſecundæ C ad D: *Quinta* I ad K, quadruplicata eſt ſecundæ C ad D: (*vt demonſtrat Auctor oper. Geom. propoſ. 27. lib. de progreſſionibus*) vnde quinta I ad K, duplicata eſt tertiæ E ad F, quemadmodum hæc ipſa duplicata eſt ſecundæ C ad D. *Secunda*: proportio rationis AB ad rationem IK, duplicata eſt proportionis, rationis CD ad rationem GH. *eſt* 165. *lib*. 8. *oper. Geom. neque requirit vt prima ratio ſit æqualitatis. Tertia*: ratio ſecunda C ad D, ducta in tertiam E ad F, producit rationem quartam G ad H: *eſt* 129. *lib*. 8. *oper. Geom. Quarta* ratio ſecunda CD, in ſe ducta, producit rationē tertiam E ad F: *eſt* 128. *lib*. 8. *oper. Geom.* plures proprietates videre eſt eodem libro & loco.

Nota 3.

Nota 3. Si fuerint duæ ſeries rationum æque multarum continuè proportionalium, habentes communem primam rationem æqualitatis, & ſingularum ſerierum termini ſint continuè proportionales, illis competere hanc proprietatem : nimirum ratio vltima E L primæ ſeriei, toties eſt multiplicata rationis ſecundæ B G eiuſdem ſeriei, quoties ratio vltima Q X ſecundæ ſeriei, eſt multiplicata rationis ſecundæ N S, eiuſdem ſeriei. idem eſt de ratione D K, vel C H, reſpectu rationis ſecundæ B G; & de ratione P V, vel O T, reſpectu rationis ſecundæ N S. porro rationem E L, toties, vel tam eſſe multiplicatam rationis B G, quoties, vel quam multiplicata eſt ratio Q X, rationis N S: nil aliud ſignificat, quam quoties ratio B G in ſe ducta, adæquat vel producit rationem E L, toties ratio N S in ſe ducta, adæquat vel producit rationem Q X: vt ſi ratio B G, ter in ſe ducta, producat rationem E L, etiam ratio NS, ter in ſe ducta, producit rationem Q X.

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
1	1	1	1	1
F	G	H	K	L
M	N	O	P	Q
1	3	9	27	81
1	1	1	1	1
R	S	T	V	X

Hinc patet, ſi fuerint tres rationes v. g. A B, C D, E F quibus hæc competat proprietas, vt prima A B toties ſit multiplicata rationis ſecundæ C D, quoties hæc ipſa multiplicata eſt tertiæ E F, patet inquam quid ſignificet primam toties eſſe multiplicatam ſecundæ, quoties hæc multiplicata eſt tertiæ: non aliud enim ſignificat, quam quoties ratio ſecunda C D in ſe ducta, adæquat vel producit primam A B, toties E F tertia in ſe ducta adæquat vel producit ſecundam C D; vt ſi C D quater in ſe ducta producat A B, etiam E F quarer in ſe ducta producet rationem C D.

A	C	E
B	D	F

Nota 4. Si fuerint tres rationes continuè proportionales, A B, C D, E F quæcunque ſiue termini ſint etiam continuè proportionales, ſiue non; nunquam illis poſſe competere hanc proprietatem; vt prima toties ſit multiplicata ſecundæ, quoties ſecunda eſt multiplicata tertiæ: &, viciſſim, ſi fuerint tres rationes, quibus conuenit, primam toties eſſe multiplicatam ſecundæ, quoties ſecunda eſt multiplicata tertiæ, nunquam illas eſſe continuè proportionales. demonſtratum ad lib. 1. hujus, cap. 16. & manifeſtum eſt, ex præcedentibus annotationibus. his ſuppoſitis

Reſpondeo ad R. P. Leotaudum & dico 1. certum eſſe, prout ipſemet rectè obſeruat, nunquam Auctorem operis intendiſſe in propoſ. 44. adſtruere, imo nec intendere potuiſſe, tres rationes illas, inter ſolida iſtic determinata, eſſe continuè proportionales: cum reuera tales nec ſint, neque Auctor illas vnquam ſecundum quantitates ſuas, ſed ſemper ſecundum multiplicationem rationum partialium compararit.

Dico 2. nunquam intendiſſe Auctorem aſſerere, totalem rationem duorum primorum ſolidorum, toties multiplicatam eſſe rationis totalis ſecundorum, quoties hæc multiplicata eſt rationis totalis tertiorum; & multo minus ex duabus rationibus notis, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hæc multiplicat tertiam, voluiſſe tertiam notam facere: huius enim problematis vniuerſaliter propoſiti ſolutio dependet à meſelabio: ſtultum autem foret quadraturam meſelabio implicare, aut illius promittere ſolutionem, & aliam non dare, quam, quæ à meſelabio dependeat: vnde

A	D	B	E	F
C	C	C	C	C

Dico 3. demonſtrationem R. P. Leotaudi, quâ ex datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hæc multiplicat tertiam, conatur tertiam notam reddere, nullo modo ſubſiſtere; quod ſingulas demonſtrationis partes examinando, ſic oſtendo. conſtructio eſt huiuſmodi: *duæ data rationes reuocentur ad commune conſequens, ſintque rationes A C, B C. tum inter A & B, media ponatur proportionalis D: ipſis autem D,B, tertia apponatur proportionalis F: denique inter B & F, media proportionalis ſit E. dico rationem E C, eſſe illam quæ quæritur.* Demonſtratio: *quia ex conſtructione, tres antecedentes A,D,B ſunt continuè proportionales, ratio A ad B, duplicata eſt rationis D ad B*: veriſſimum eſt. *ſed vt D ad B, ita ex conſtructione, eſt B ad F; ergo ratio A ad B, duplicata eſt rationis B ad F*: & hoc eſt veriſſimum. *ſed quia ex eadem conſtructione, tres B,E,F, ſunt etiam continuè proportionales, erit etiam ratio B ad F, duplicata rationis E ad F, ſiue B ad E*: verum eſt hoc eſt. *Quare cum tres rationes A C, B C, E C, quarum idem eſt conſequens C, ita ſe habeant, vt ſe habent antecedentes A, B, E*, quod veriſſimum eſt, *erit prima ratio A C, duplicata rationis B C, & hac duplicata rationis E C*: ſequela planè nulla; huiuſmodi enim eſt Syllogiſmus: *ratio A B, duplicata eſt rationis B F, & hæc duplicata rationis B E: tres inſuper rationes AC, B C, E C, ſunt inter ſe vt antecedentes A,B,E. ergo ratio A C, duplicata eſt rationis B C, & hac duplicata rationis E C.* quæ forma Syllogiſmi, quæ connexio præmiſſarum aut inter ſe, aut cum concluſione? omnino nulla. vitium in hoc conſiſtit; quod à rationibus comparatis inter ſe ſecundum multiplicationem, fiat tranſitus ad rationes, non eaſdem, ſed alias, comparatas inter ſe ſecundum quantitates, ſeu denominatores ſuos; & rurſus ab his, tranſiatur ad eaſdem comparatas inter ſe ſecundum multiplicationem.

Porro ex ipſis numeris, quos P. Leotaudus adhibet, manifeſtè patet error demonſtrationis: numeri ſunt huiuſmodi.

A	D	B	E	F
2816	2730	2648	2607	2568

C
3641

Si ratio A ad C, duplicata ſit rationis B ad C; & hæc duplicata, rationis E ad C, prout demonſtratio infert; igitur cum rationes illæ, commune habeant conſequens, neceſſario B numerus debet eſſe medius proportionalis, inter A & C; & numerus E, medius proportionalis inter B & E: item A in C, debet idem producere, quod B in ſe; & B in C, idem quod E in ſeipſum: quorum neutrum verum eſt, vt numeros examinanti ad oculum patet.

Sed alios aſſumamus numeros, iuxta conſtructionem à P. Leotaudo datam, determinatos:

A	D	B	E	F
1	4	16	32	64

C	G
1	256

Inter A & B, antecedentes rationum datarum, media proportionalis ſit D: ipſis vero D & B, tertia inueniatur proportionalis F: denique inter

B &

B & F, media proportionalis ſit E : aſſumaturque pro communi conſequente C vnitas. patet neque B, inter A & C, neque E, inter B & C, eſſe mediam proportionalem; quod tamen requiritur, vt ratio A C, duplicata ſit rationis B C, & hæc duplicata rationis E C. at ne quis paralogiſmi cauſam coniiciat in vnitatem C, pro communi conſequente aſſumptam; loco C, ponatur G, quæ tertia ſit proportionalis ipſis A, B, tunc quidem ratio A G, duplicata erit rationis B G, ſed B G ratio, non erit duplicata rationis E G, cum E non ſit media proportionalis inter B & G, ſed inter B & F.

Ex his concludo, non ſolum demonſtrationem R. P. Leotaudi non ſubſiſtere, ſed nec conſtructionem ipſam, ad rem pertinere, aſſeroque ex eiuſmodi conſtructione, nunquam intentum obtineri poſſe.

F E G

A B C

Porro problema à P. Leotaudo propoſitum, de ratione duplicata, ſoluetur, hoc modo. *Sint rationes A B, B C datæ, & A B quidem duplicata ſit rationis B C, oportet exhibere rationem tertiam, cuius duplicata ſit ratio B C. inter B & C, media inueniatur proportionalis E: dico rationem E C, eſſe quæ quæritur: cum enim B, E, C, continuè ſint proportionales, patet B C rationem duplicatam eſſe rationis E C,* & hanc eſſe quæ quæritur.

Si vero A B ratio, ſit quadruplicata rationis B C, tertia ratio ſic exhibebitur: *inter B & C, media inueniatur proportionalis E. Dein inter B & E, media ſit F; & inter E & C, media ſit G: dico rationem G C, eſſe quæſitam: cum enim B, F, E, G, C, continuè ſint proportionales, ratio B ad C, quadruplicata erit rationis G ad C, adeoque hæc eſt quæſita.*

A B E F C

Notatu autem dignum eſt, problema, quo *datis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hæc multiplicat tertiam, petitur exhiberi tertia*; non poſſe ſolui independenter à meſelabio, niſi quando duæ rationes datæ, ſunt in ſerie proportionalium rationis duplæ: quando v. g. prima eſt duplicata ſecundæ, vel quadruplicata, vel octuplicata vel ſedecuplicata &c. ſi enim datæ rationes, in alia proportionalium ſint ſerie, v. g. rationis triplæ, quintuplæ &c. non poterit problema ſolui, niſi dependenter à meſelabio: ſit v. g. ratio A B, triplicata ratio B C, oporteatque inuenire tertiam rationem, cuius B C, ſit triplicata: inter B & C, duæ ponantur mediæ proportionales E, F; & F C ratio erit quæſita: neque porro aliter ſoluetur illud problema: atque hæc cauſa eſt, cur toties in antecedentibus, dum de problemate hoc vniuerſaliter propoſito egi; ſemper dixerim *ſolutionem* illius *vniuerſalem* à meſelabio dependere, quamuis in aliquibus caſibus particularibus, independenter à meſelabio ſolui poſſit, vt oſtendi in ratione duplicata, quadruplicata &c.

Cum igitur R. P. Leotaudus, ex ſolutione illius problematis, cuius conſtructionem & demonſtrationem non ſubſiſtere ante docui, tertiam exhibuerit rationem; duorum ſolidorum cylindricorum in propoſ. 44. lib. 10. quæſitam, & exinde decretoriam in primam quadraturam ferat ſententiam, palam eſt, hanc nullam eſſe, & illam non modo à R. P. Leotaudo non euerſam, ſed ne læſam quidem eſſe.

Quomodo, & quid, ex partialibus rationibus, de totalibus inferri poſſit, oſtendi in ſcholio ad propoſ. 46.

RESPON-

RESPONSIO III.

Ad ἘΞΈΤΑΣΙΝ Clariſſ. D. Chriſtiani Hugenij.

EXplanatis iis, quæ ad primam quadraturam pertinero videbantur, nolui ſtudium hoc meum, aut deeſſe Tibi Clariſſ. Domine, aut ab aliis requiri, quibus Auctoris ſilentium, tacita videri poſſet erroris confeſſio: & quamuis ex iis, quæ in præcedentibus à me dicta ſunt, facilis ſit eorum refutatio, quæ toto cyclometriæ examine perſcribis, ſtudio tamen in hunc locum differre placuit, vt totam ſimul ἐξέτασιν tuam, vna cum reſponſo, non interruptim oculis obiicerem.

Primum igitur pag. 25. *quatuor, inquis, modos propoſuit (Auctor) quadrandi circulum; vnum vero eorum, etiam quadraturæ hyperboles applicauit: quem cæteris potiorem ab ipſo exiſtimari, ex multis indiciis colligere licet; vnum eſt hoc ipſum, quod duas diuerſarum figurarum quadraturas, per eundem hunc demonſtrarit: alterum, quod euidentior hic ſit modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit: & denique hoc maximum eſt, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, vbi ſuæ inuentionis hiſtoriam & progreſſum paucis expoſuit, nullius modi præter hunc vnum meminerit: potuit & aliam rationem habuiſſe tres poſteriores quadraturas illic ſilentio prætereundi; eam videlicet, quod quatuor, omnes ſciret ex iiſdem principiis deductas, & demonſtratas eſſe.*

Falleris Clariſſime Domine, & coniecturæ illæ tuæ, quam longiſſimè à vero diſtant; ſola & vnica ratio præponendi illam, quam circulo ſimul & hyperbolæ applicuit Auctor fuit propoſitio 50. quæ, cum cylindrum ad aliud corpus non cylindricum, admirabili reducat modo, adeoque quadraturis omnibus eſſet fundamentalis, neque ſine ordinis perturbatione, aliis inſeri poſſet, primum huic quadraturæ locum dedit. Porro quadraturas omnes ex iiſdem principiis deductas, & demonſtratas eſſe, error eſt longè grauiſſimus: nam præter reductionem cylindri circularis, ad ſolidum ex ductu ſubalterno parabolarum ortum, nil prima cum cæteris commune habet: ratiocinatio in vtriſque, & ſolidorum, rationumque comparatio, toto differunt cælo. in hac, nullus proportionalitatum vſus; illæ, abſque earum ope perfici non poſſunt: in hac, per rationes partiales æquemultiplicatas, nouo modo inſtituitur argumentatio, in illis, nulla multiplicationis mentio.

Pergis deinde: *ſed mihi vel alterutra harum conſiderationum ſufficere viſa eſt, vt perſuaderet, vnam pro omnibus fore diſcuſſionem, quæ quadraturam primariam infirmatura eſſet, reliquarum agmen ducentem: ſi enim erratum in ea oſtenderimus, quæ minus obſcuritatis habet, non video quâ ratione melior ſucceſſus expectandus ſit in tribus ſequentibus, quæ maximâ caligine inuoluuntur, quaſque auctor ipſe vel vni illi poſthabere videtur.*

Duplex hic in tam paucis lineis error interuenit; prior in hoc conſiſtit quod vnam omnibus ſufficere diſcuſſionem exiſtimes: qui enim diſcuſſio vna, ſufficere poſſit omnibus, cum tribus reliquis nil, cum prima ſit commune? eſto (quo nihil minus factum) primam euerterit ἐξέτασις tua; ad reliquas certè non magis illa, quam ad Archimedæam pertinet dimenſionem. experire ſi placet, & ilico iudicium ipſe tuum corriges. alter in eo eſt, quod primam minus habere obſcuritatis, ſequentes autem maxi-

ma

mâ inuolui putes caligine. at longè aliud de illis cenſet Auctor, aliud ego dum ſingulas explano, expertus ſum. prima certè plus & tricarum & obſcuritatis habet, quam reliquæ ſimul omnes. in his & clariſſima eſt ratiocinatio & reductio ſolidorum facilis; in illa nouus per rationes partiales æquemultiplicatas comparandi modus, intricatus eſt, & ſolidorum reductio multiplex, varia, ac perdifficilis.

Pag. 26. *unum tamen prætermittere nequeo quin dicam; Clariſſ. virum non ſatis feliciter quadam inuenta in materia proportionalitatum ad quadraturam applicaſſe; atque hinc meâ opinione ipſi exſtitiſſe erroris cauſam. primum omnium id in propoſ. 39. lib. 10. obſeruauerum &c.*

Grauis hic rurſum occurrit error. neque enim in 39, neque in tota prima quadratura, vllus proportionalitatum vſus. quippe longè aliud eſt, rationes inter ſe comparare, ſecundum æquemultiplicationem illarum rationum, ex quibus iuxta octauam eiuſdem lib. 10. conſtituuntur, aliud per proportionalitates argumentari: lege propoſ. 39. iuxta Auctoris mentem explicatam, illamque confer cum propoſ. 3. ſequentis libri, cuius demonſtratio per proportionalitates inſtituitur; & ilico diſcrimen ingẽs apparebit: & vero quî Auctor potuit inuenta quædam in materia proportionalitatum infelicius ad quadraturam applicaſſe, cum nec in propoſ. 12. aut 39. nec in 40. aut 44. nec in 51. aut 52. aut 53. quibus tota prima continetur quadratura, vllam citet aut vllâ vtatur propoſitione ex libro de proportionalitatibus petitâ? non igitur inde exſtitiſſe Auctori potuit erroris cauſa.

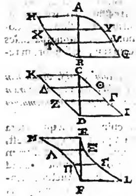
Pag. 27. *eo rem deducam, vt. ſi quidem non impoſſibile dicet quadraturam ſuã ad exitum perducere, & per eam reapſe inuenire rectilineum circulo æquale, oſtendam quî id facillimè impoſterum aſſequatur: deinde veſtigia ipſius inſiſtens demonſtrabo, quibus hactenus nobis præceſſit, iis nequaquam ad optatum finem peruenire poſſe.*



De modo quem daturum te polliceris quo facillimè impoſterum Auctor rectilineum circulo inuenire poſſit æquale, mox videbo, vbi ad illum deuenero. porro veſtigia illius inſiſtendo ad optatum finem deueniri poſſe hic, & ſequentes edocebunt libri.

Quæ ſequuntur vſque ad pag. 32. nil aliud continent, præter aliquot Auctoris propoſitiones.

Pag. 32. *his ſic conſtitutis, ſciendum eſt omnem ſpem & fundamentum perficiendæ quadraturæ, Clariſſ. viro in eo poſitum eſſe, quod exiſtimet rationem ſolidi HY ad ſolidum XV (quam vnicam tantum deſiderari iam monui) facilè inueniri poſſe, ſi cognitæ ſint duæ rationes nimirum ratio ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, & ratio ſol. KΘ ad ſol. ΔΓ. ſic enim tunc argumentabitur: nota eſt ratio ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, item ratio ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, ergo notum quoque, quoties illa ratio hanc continet; quoties autem illa hanc continet, toties hæc ipſa continet rationem ſolidi HY ad ſol. XV, ergo & hæc nota erit.*



Planè hic ab Auctoris mente deuias; licet enim fundamentum perficiendæ quadraturæ in eo poſitum ſit, vt nota reddatur ratio ſolidi H Y ad ſol. X V, nunquam tamen exiſtimauit Auctor illam facilè inueniri poſſe, ſi cognitæ forent duæ rationes, nimirum ſolidi ΜΞ ad ſol. ΛΣ, & ſol. ΚΘ ad ſol. ΔΓ; has enim antea notas fecerat propoſ. 43. vnde nec illam quam profers argumentationē inſtituet, ſed eam, quam in ſcholio ad propoſ. 40. attuli, quæ toto cælo à tua differt: porro ex datis vel notis duabus rationibus, quarum prima toties per multiplicationem continet ſecundam, quoties hæc per multiplicationem continet tertiam, velle tertiam vniuerſaliter notam facere, idem eſt atque inter duas datas, quotcūque medias proportionales velle exhibere: ſtultum autem foret quadraturam meſelabio commiſcere, aut hoc ad illam perficiendā ſupponere. non igitur ex duabus notis rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hæc multiplicat tertiam, ſperauit Auctor hanc notam reddere.

Ibid. *ſi igitur indicauero ipſi, quæ ſit ratio ſolidi* ΜΞ *ad ſol.* ΛΣ, *item quæ ſit ſolidi* ΚΘ *ad ſol.* ΔΓ, *& ne tum quidem dicere poſſit, quam rationem habeat ſolidum* HY *ad ſol.* XV, *fateatur ſanè ſe fruſtra vtramque quadraturam tentaſſe, tum circuli tum hyperboles.*

Superſedere, mihi crede, labori iſti poteras; rationem enim ſolidi ΜΞ ad ſol. ΛΣ, item ſolidi ΚΘ ad ſol. ΔΓ, notam habuit, aliiſque & Romæ & in Belgio demonſtrauit Auctor, pluribus annis antea, quam tu vita & luce fruereris: lege propoſ. 43. lib. 10. quæ vtramque rationem notam facit; nil igitur opus erat illam Auctori indicare, ex quo ſolo notitiam illius hauſiſti.

Sin vero datis iſtis duabus rationibus, inuenire poſt hac potuerit rationem ſolidi HY *ad ſol.* XV, *tum ſe credat circulum reuera quadraſſe.*

Hic ille modus eſt circulum facillimè ad quadrum reducendi, quem pag. 27. daturum te Auctori pollicitus es: Quæſo te Clariſſ. Domine, vnde habes, notâ ratione ſolidi H Y ad ſol. X V, quadraturam abſolui? non aliundè certè quam ex Auctore, neque id, ſi velis, diffiteri potes: vt quid igitur, ac ſi hunc ignorares, is à quo ſolo didiciſti, quadraturæ modum præſcribis? cum illa ſcriberes, optaſſem meminiſſe te, quid, & cui ſcriberes.

Dicam autem nunc ipſas rationes: & primam quidem, hoc eſt rationem ſolidi ΜΞ *ad ſol.* ΛΣ, *aio eſſe eandem quæ numeri 53 ad 203. alteram vero rationem ſolidi* ΚΘ *ad ſol.* ΔΓ, *eam quæ 5 ad 11. atque horum vtrumque infra ſum demonſtraturus &c. conſequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, quoties ratio harum prima, contineat ſecundam, hoc eſt quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. ſed enim quo ſenſu verbum continere hic explicaturus eſt?* &c.

Rationem ſolidi ΜΞ ad ſol. ΛΣ eandem eſſe quæ numeri 53. ad 203. & alteram ſolidi ΚΘ ad ſol. ΔΓ, eam quæ 5. ad 11. nil habeo quod opponam, cum vtrumque rectè demonſtratum ſit: quoties autem ratio prima

prima

ma per multiplicationem contineat ſecundam, definitum eſt in ſcol. ad propoſ.40. ex ſolis Auctoris principiis: quo autem ſenſu verbum *continere* explicaturus ſit, vide idem ſcholiū & propoſ. 39.40. ante explicatas. vnde à vero alienum eſt, quod pag. 37. aſſeritur, aliam interpretationem verbi *continere*, præter duas à Te allatas, nullam in oper. Geom. exhiberi. & vero miror, interpretationem illam à Te perceptam non eſſe, cum ex prop. 12. quæ octauæ innititur, facile intelligi potuerit, additâ præſertim explicatione P. Saraſſæ coroll. 9. confirmationum quadraturæ, qui liber deeſſe Tibi non poterat, in tanta locorum vicinitate, cum duobus annis ante tuum prodierit.

Pag. 37. *non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſolidi* ΜΞ *ad ſol.* ΔΣ, *contineat rationem ſol.* ΚΘ *ad ſol.* ΔΓ, *ac proinde nec determinari poterit, quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi* HΥ *ad ſolidum* XV: *quare liquet hanc rationem ne duabus quidem prioribus datis; per inuenta Clariſſ. viri cognoſci poſſe, adeoque fruſtra ipſum ſperaſſe, hoc modo perficere circuli quadraturam.*

Hic error commiſſus eſt palmaris, qui etiam in Auctoris doctrina peregrinum Te oſtendit: ſiue enim verbum *continere* ſumas in ſenſu ab Auctore intento & ante à me explicato, ſiue per illud intelligas *continentiam per multiplicationem*, vtrumque determinandi modum abunde docuit vt oſtenſum in ſchol. ad propoſ. 40. lib. 10. oper. Geom. vnde tertia illa ratio per inuenta Auctoris nota fieri potuit, adeoque non fruſtra hâc viâ ſperauit circuli quadraturam perficere.

Reſtat nunc tantum vt manifeſta faciam, quæ in præcedentibus poſita fuere. dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum ΜΞ *eſſet ad ſol.* ΔΣ, *vt 53 ad 203; item quod ſolidum* ΚΘ, *rationem haberet ad ſolidum* ΔΓ, *quam 5 ad 11. quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, vt notum habeamus, quæ ſit ratio vngulæ parabolicæ ad cylindrum ſuum, idcirco hanc rationem declarantes, tractatum Clar. viri quem de eadem vngula propoſuit, vno egregio Theoremate auctiorem reddemus; quod miror ipſum non inueniſſe, cum ex iis quæ iam oſtenderat facili negotio deducatur.*

Falleris Clariſſ. Domine, Theorema illud & vidit & inuenit Auctor iam à triginta & quod excedit, annis: ſed quia tam nullo negotio ex iis quæ demonſtrarat deduci poterat, corollario illud, non propoſitione dignatus eſt. Inſpice corollarium propoſ 99. lib. 9. oper. Geom. in quo hæc verba leges: *Hinc manifeſta eſt ratio dignoſcendi proportionem inter vngulam parabolicam & cylindrum, qui vngulam continet; vel inter vngulam & reſiduum cylindri* &c. atque hoc miror valdè, aut non legiſſe Te aut ſi legeris diſſimulaſſe.

Cæterum cum toto Cyclometriæ examine nil aliud egeris, quam oſtendere quod ex notis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat ſecundam, quoties hæc multiplicat tertiam, per auctoris inuenta, quæ primæ adhibuit quadraturæ, tertia non innoteſcat, Auctor vero toto cælo diuerſâ incedat viâ, adeoque ex duabus notis rationibus æquimultiplicatis, nullo modo intenderit tertiam notam facere, quia illius ſolutio dependet à meſelabio, manifeſtum eſt ἔλεγχον tuam, non ſolum primam Auctoris quadraturam non euertere, ſed illam ne quidem impetere.

Laude tamen dignus eſt conatus tuus, *quo licet maiori diligentia quam ſucceſſu rem arduam tentaueris*, non exiguum eſt tot inter eximios hoc æuo

 geome-

geometras, Te primos inter, hanc Tibi prouinciam delegiſſe. quod rurſus ſtudium, adhibere ſi vacet, & Auctorem & me nouo affeceris beneficio.

RESPONSIO IV.

Ad Cenſuram Merſennij.

QVamquam Merſenni Cenſura, eiuſmodi mihi ſemper viſa ſit, quæ, non dico refelli ſcripto, ſed ne legi quidem à doctis mereatur, tum quod prorſus ſit ageometrica, & in omnibus, hoc eſt ſingulis ſui partibus apertè falſa; tum quod in pleriſque auctori iniurioſa. Eandem tamen, vt doctiſſimam & verè geometricam, quia toties obtrudit Cenſor, illamque vt talem, etiam approbet notus ille toti orbi Geometra Æ.R. lubuit ſingulas illius partes examini ſubiicere, & communi Geometrarum omnium iudicio committere. quod dum ago, nulla à me defuncto pridem Merſennio lis indicitur; cum Cenſore, cum noto illo Merſennij Geometra (qui cenſuræ illius hæredes, vel vt nonnulli ſuſpicantur auctores ſunt) tota mihi res erit: quieſcat ille, & quâ frui cæpit, æternum frui pergat felicitate.

Cenſura Merſennij.

A noſtris autem phænomenis editis, conatus ingens in inuenienda circuli quadratura; labore improbo impenſus eſt, & decem libris explicatus.

QVód felix fauſtumque ſit, ingentes P. Gregorij labores, faſtis tandem inſcripti ſunt; & quidem eiuſmodi faſtis, quos non facilè ipſamet expunxerit inuidia: *à phænomenis noſtris editis*, hoc eſt ab anno 1644, quadratura vrgeri cæpit. attendite quotquot eſtis, toto orbe chronologi, & ne cui res tanta fortè excidat, aut vario annorum computu obſcuretur, à phænomenis Merſennij editis, annorum ſeriem ducite. firmatam habetis Epocharum radicem; valeăt poſt hæc olympiades &c. intricata Chronologorum ſtudia, à Merſennianis phænomenis, expediti deinceps inſcribentur faſti.

At dicite, amabo, Cenſores, creditiſne fieri poſſe, vt à phænomenis Merſennij editis, hoc eſt ab anno 1644, ad annum vſque 1646; quo quadratura imprimi cæpta eſt, duorum ſcilicet annorum ſpatio, tantũ opus, quo duo ferè propoſitionum millia continentur, contexi, tantamque veritatum multitudinem, tantam materiarum diuerſitatem inueniri, demonſtrari, imo vel exarari aliquoties antequam prælo committerentur, ab homine ſenectute ipsâ impedito potuiſſe? ego certè non credo, nec vllus credet geometra. neque ſane minori tempore opus tale peruolui accuratè poſſe ſat ſcio. accuratè inquam, præſertim ab iis qui Cenſores, agere cum decreuiſſent, non leui oculo librum percurrere, nec ſumma ſparſim capita delibare tantum debuiſſent, cum de toto opere iudicium ferant. aliud vero Cenſuræ Auctores feciſſe non facile adducar

vt

vt credam. præfationem operis inſpicite, atque à triginta & quod excurrit annis, peruigili ſtudio illi ſe inſudaſſe Auctorem ipſum candidè fateri comperietis: non igitur à Merſennianis phænomenis, hoc eſt ab anno 1644, conatus ingens in inuenienda circuli quadratura, labore improbo, impendi cæpit, ſed à triginta & quod excurrit annis: quid igitur hæc Cenſuræ vult ſententia? an quo anno phænomena Merſenni eodem, Auctoris opus prælo ſubiectum ſit? at falſum id eſſe ex prima operis fronte, prælique adſcripto anno 1646, patet. an Merſennianis igitur phœnomenis, & circuli dimenſioni, quid commune eſt, vt inde tanti operis ſuſcipiendi arreptam fortè anſam ſuſpicemini? at illorum initio nil aliud promitti video, præter *amuſſim, libellam, perpendiculum, runcinas, terebras, valla & vrpices, quibus occatur, liratur, porcaque transuerſâ deriuantur vligines in collicias* &c. his adde Mechanica phænomena, Acontiſmologica, Harmonica: quid his cum circuli quadratura commune, quid affine? edocete quæſo, ſi quid occurrat, dum ad alia cenſuræ phænomena feſtino.

Quo proportionalitates nouo modo deducuntur, quippe non ſolas rationes ſimiles, ſed etiam diſſimiles inter ſe comparet.

DEcem, inquit, *libris explicatum*, improbus ſcilicet labor, *quo proportionalitates nouo modo deducuntur*: an igitur aliud nihil totis decem libris explicatum cenſetis? tam leui oculo vaſtum illud Auctoris opus percurriſtis, vt ea quæ paſſim occurrunt præclariſſima inuenta, quæque antiquitati nihil cedunt, non aduerteritis? nihil actum putatis, cum progreſſiones Geometricæ in infinitum excurrentes, ad geometricum reductæ ſunt rigorem, terminiſque incluſæ? nihil, cum ex vario planorum in plana ductu, noua omnis generis effinguntur corpora, explanantur, reducuntur, cubantur? nihil, cum vngulæ ſeu ſegmenti cylindrici cubationem, imo & ſuperficiei tam exoticæ, vt quæ rota ſemicirculo elipſique clauditur, aream quadrando determinat? nihil, cum eiuſdem vngulæ cum ſphæra ſymmetriam & omnimodam concordiam primus exponit? nihil, cum ſphæroidium, Conoidium parabolicorum, hyperbolicorumque proprietates admirandas plane aperit ac demonſtrat? nihil, cum tam varis expeditiſque modis parabolam quadrat, imo & hyperbolam intactam hactenus indomitamque? nihil cum iucundiſſimas abſtruſiſſimaſque conorum & conicarum ſectionum proprietates, tribus omnino libris per octingentas & quod ſuperat propoſitiones, inuenit, deducit, demonſtrat? nihil, cum ſtupendam illam parabolæ cum ſpirali Archimedæa ſymbolizationem expreſſit, explanauit? hæc ſi per vos ne nominari quidem merebantur, parum laboramus; Geometras habet orbis, habet & Gallia, quos conſtat agnoſcere non inuitos, quantum Auctori tota debeat Geometria. omnis certè illum mirabitur retro poſteritas, gratulabiturque huic æuo, talem tuliſſe geometram, quem antiquitas, etiam non datâ quadraturâ, ſuum vellet.

Sed agite porro, quid id eſt quod proportionalitates nouo tantum modo deductas pronuncietis? an apud vllum hactenus, vllo eas modo demonſtratiuè deductas conſpexiſtis? Auctores afferte, & vltro cedimus. ſcio equidem complures de rationum additione, multiplicatione,

compoſitione,diuiſione perſcripſiſſe,ſed & illud non ignoro,eoſdem non niſi de rationibus rationalibus tractaſſe, atque ita quidem, vt compoſitionem rationum ab earundem additione non diſtinguant, confundantque operationes ſpecie differentes, atque adeo ſummam in geometriam confuſionem inuexerint, vt libro 1. demonſtratum eſt: qui vero de rationibus ſcripſerit diſſimilibus, qui earundem operationes ſpecie diſtinxerit,ſingulaſque demonſtrarit, præter Auctorem operis Geom. certus ſcio eſſe neminem.

At vero cum neque dederit quadraturam eo modo quo ſolet à geometris expectari.

DEdit igitur quadraturam eo modo, quo non expectabant dandam Geometræ:aſſurgite quotquot eſtis geometræ, Auctorique plenis vocibus congratulamini:grarias ei agat ipſamet Geometria, id namque quod hactenus datum eſt nemini, perfecit hic, quadraturam dedit; & ne parum ageret, eo quidem modo dedit, ipſo Cenſuræ teſtimonio, qui cum à Geometra nullo expectaretur, nouitat: ſua duplicauit beneficium.

Quæro tamen,cum neque dederit quadraturam Auctor eo modo quo à Geometris ſolet expectari,agite & Auctorem edocete,quo ſoleat quadratura à Geometris expectari modo:nimirum hoc ignorat ille, qui ætatem in Geometricis triuit,ignoramus & nos,& àMerſennio,atque à vobis præcepta capimus. pergite porro: quadraturam dedit Auctor, ſed non eo modo quo ſolet à Geometris expectari:at modus ille quo quadraturam dedit,Geometricus eſt nec neſſi eſt:eo igitur modo quadraturam dedit quo ſolet à Geometris expectari, nimirum geometrico. ſin autem,de hoc rurſum quæro,quâ de causâ Geometricus non ſit? quid ſiletis?cur nulla dicti adfertur ratio?ſi quid conicam inter & Geometricam problematis ſolutionem interſit non rectè fortaſſis percipiatis, legite ſi placet ea quæ lib. primo in hanc rem à nobis perſcripta ſunt, & ilico ceſſabit quæſtio.ſed audio:

Cum in ea exhibenda longè quam ipſam quadraturam difficiliora ſupponat vel poſtulet.

NOn dedit igitur eo modo quadraturam Auctor, quo ſolet à geometris expectari, quia in ea exhibenda longè quam ipſam quadraturam difficiliora ſupponit vel poſtulat. palmaris hæc impoſtura eſt, tantoque grauior, quanto impudentius eſt ea in re fidem fallere, in qua à quouis mendacij argui poſſis. aio igitur in toto Auctoris opere, hoc eſt libris omnino decem, ne nomen quidem ſuppoſiti aut poſtulati vel ſemel legi; agite & mecum ſingulos ſcrutamini diligenter; eccum vobis primum & tertium: circularem hic Geometriam,linearem ille continet;lemmaticus eſt vterque,& totus Euclidæus; ideoque nec definitionibus quidem eguere. quid in his ſuppoſiti,quid poſtulati venit nomine? omnino nihil.

Ad ſecundũ de progreſſionibus,qui medius inter hos interiacet,pergamus.

mus. nomen inuſitatum præſefert, ac definitiones omnino tres præmittit. ſed videte, obſecro, numquid poſtulent aut ſupponant: loquendi modum in re noua explanare eas tantum audio; exponereque quid Auctor, Geometricæ ſeriei, quid progreſſionum, quid denique termini progreſſionis nomine intelligat: hoccine eſt ſupponere aliqua, aut poſtulare ipsâ quadraturâ difficiliora quæ ſunt?

En ſequentes tres; qui ordine quartum, quintum & ſextum conſtituunt, quid in his ſupponitur, quid poſtulatur, non dico ipsâ quadraturâ difficilius, ſed quid vel ſpeciem ſuppoſiti aut poſtulati habet? definitiones aliquæ elipſeos, parabolæ, & hyperbolæ, leguntur; cætera omnia demonſtratiuè ſunt deducta: at illæ ex Archimede, Apollonioque petitæ cum ſint, nihil inuſitatum afferunt, quadraturâque difficilius quod ſit.

Ad ſeptimum abeamus; qui de ductibus planorum in plana inſcribitur, peregrinus is eſt, totuſque in vngularum inuolucris; ac ſolida ſecum trahit immania: at plana hic rurſum omnia, atque vt iter ſcabroſum alias, complanaret magis, tribus illud definitionibus, qui loquendi modum explicent, exæquat: nihil igitur plano illi ſupponitur, nihil poſtulatur.

In octauo, qui de proportionalitatibus eſt, quatuor recepta ponuntur principia: primum, *finiti ad finitum in eadem ſpecie quantitatis eſt proportio.* ſecundum, *datis tribus vel pluribus quantitatibus; ratio prima ad vltimam, componitur ex rationibus mediarum:* tertium, *rationes quæ ex iiſdem rationibus componuntur ſunt eædem:* quartum & vltimum, *quantitas rationis ſiue denominator, ductus in conſequentem terminum rationis, producit antecedentem:* primum lumine naturæ notum eſt: ſecundum & tertium, Euclidæa ſunt; quartum denique ab Eutochio, Theone, Vitellione, aliiſque geometris omnibus aſſumptum eſt & à pluribus demonſtratum: quid in his ſupponitur, quid poſtulatur ipsâ quadraturâ difficilius?

In nono, duæ omnino ſunt definitiones; quarum prior, quæ cylindri portio, vocetur ab Auctore vngula; poſterior, quid vngularis inuolucri veniat nomine, definit. In decimo, nequidem vlla ponitur definitio. vbi igitur ſuppoſita illa, vbi poſtulata, quadraturâ ipsâ difficiliora quæ ſint? acutùm profecto videtis, qui poſtulata, & ſuppoſita, quæ nuſquam ſunt videtis.

Neque meminerit vllatenus Geometriæ per indiuiſibilia Eruditiſſ. Bonauent. Caualleri, quandoquidem primus illam per indiuiſibilia methodum edidit, quæ tamen illi præluxiſſe videtur.

AT neque Eruditiſſimi Vietæ meminit, neque doctiſſimi Mydorgij, Clariſſimique Gaſſendi, aut Carteſij etiam eruditiſſimi, neque adeo etiam Merſennij, aut illius quem ſuum vocat Geometræ vſquam meminit: quid deinde? at Cauallerius ipſi præluxiſſe videtur, non præluxerunt cæteri: Merſennij certè phœnomina non minus Auctori, quam Caualleri indiuiſibilia, ad tantam rem aggrediendam præluxerunt; cur huius cauſa ſuſcipitur, illius verò non item?

Sed agite, quâ ratione probatis Geometriam per indiuiſibilia Cauallerij, Auctori præluxiſſe? quia nempe Cauallerius primus illam per indi-

uiſibilia

uiſibilia methodum edidit: eſto, quid inde ſequitur? an Auctor in toto vſpiam opere per indiuiſibilia procedit? ne vos homines minimè ſitis mali id ſi opinamini: at dicite amabo, in quo libro demonſtrationibus ſuis, illam per indiuiſibilia methodum adhibet? in ſeptimo vtique, vbi ex ductu planorum in plana, noua effinguntur corpora. capio: methodus igitur illa Cauallerij per indiuiſibilia, cum Auctoris ductibus coincidit, & duo illa, res vobis vna eademque ſunt: illa, additione infinitorum indiuiſibilium vt ſic, perficitur; hæc, ductum rectangulorum in inuicem verè geometricum, ſeu multiplicationem continet: illa, ab vna ſpecie quantitatis ad aliam nec geometricè nec demonſtratiuè procedit; hæc, Geometricâ, vereque Archimedæâ perficitur exhauſtione; illa falſa, niſi alio reducatur, vt à pluribus oſtenſum eſt; hæc, exploratæ veritatis eſt, probatiſque innititur antiquorum principiis; nil igitur Auctoris ductibus cum illa Cauallerij per indiuiſibilia methodo, commune, imo nec affine:

Sed aliud iam contendo: eſto, quod falſum eſt, Caualerianam methodum in aliquo cum Auctoris ductibus conuenire; quî inde conficitur, illum huic præluxiſſe? ſequelam hanc, ipſe negarit Caualerius. obiecerat huic Guldinus, illum ſuam per indiuiſibilia methodum, à Kepplero, ac Souero mutuaſſe, propter magnam cõuenientiam ac ſimilitudinem principiorum; quâ admiſsâ, rectè tamen negat Caualerius inde ſequi, methodum ſuam ab illis mutuatam eſſe: legite ſi placet, cap. 2. exercitationis tertiæ; vlterius procedo & dico, Geometriam Caualerij, ante opus Geometricum editum, nunquam ab Auctore lectam, imo nec conſpectam fuiſſe, id Auctor ipſe, id è noſtris plures, qui per annos multos illius auditores fuere domeſtici, quâ poſſunt fide & religione teſtantur: ſed illam ante viderit, & legerit Auctor, quam opus ſuum ederet, an idcirco illa huic præluxit? illa edita eſt anno 1635. at ductus ſuos compoſuit Auctor, anno 1621. & biennio poſt, Romam cenſendos miſit Patri Grimbergero, illuſtri tunc Geometræ, cuius rei teſtes ipſius Grimbergeri litteræ, & grauiſſimi adhuc ſuperſunt viri: teſtis item eſt P. Gulielmus Boelmans, Auctoris quoque domeſticus auditor, ac multis deinceps annis matheſeos profeſſor, qui in libello Theſium, anno 1634. edito, inter alia, parabolam ex Auctoris ductibus quadrauit: non igitur Auctori prælucere potuit Cauallerij methodus, quæ tot annis poſterior nata eſt, & tam immenſum ab illius ductibus recedit, adeoque nec illius vllâ ratione meminiſſe debuit.

Noſtris Geometris diſplicuit.

MAgnum crimen, lectores, ſcelus inauditum: Auctor alio modo quadraturam dedit, quam dandam expectabant Geometræ, Auctor non meminit Geometriæ Caualerij, reus igitur eſt, & Geometris Galliæ diſplicuit: at, quinam illi ſint Geometræ, quibus Auctoris opus, ob duas illas in cenſura allatas rationes, diſplicuit? ætatem habent, & calamum, cur iudicium ipſi ſuum non produnt? quid alieno loquuntur ore? non tam malè in Galliis cum Geometria agitur, vt geometricum iudicium, de re geometrica fieri quî debeat, ignorent; ſeque feciſſe ſatis putent, ſi temerè, nullâque additâ demonſtratione, pronuntient, *noſtris Geometris deſplicuit*. certè Clariſſimo Pellio non ſatis fuiſſet iactitare, Longomontani quadraturam diſplicuiſſe Geometris: neque Eruditiſſimus Gaſſendus, aut do-

ctiſſimus Mydorgius, quidquam ſeſe effeciſſe exiſtimaſſent, ſi Mathematicarum recreationum libellum vnus, nouos alter Reytæ circa Iouem errones, diſplicuiſſe ſibi, aliiſque acri ſupercilio pronuntiaſſent: aliam illi longè ingreſſi ſunt viam; neque crediderim mutatâ repentè voluntate, ſcribendique conſuetudine, eos abſque demonſtratione vlla, ad diiudicandum opus ſubtiliſſimum, voluiſſe proſilire, aut tam imperitæ ſubſcribere cenſuræ.

Qui præterea, nonnihil in illo opere requirunt, vel arguunt: idque præſertim, quod cum opus ſuum quadratura circuli, ſpecioſo ſuperboque titulo inſignierit.

VEl Auctor quadraturam dedit, vel non; ſi prius, qui potuit modeſtioribus opus ſuum verbis inſcribere? ſi poſterius, id non temerè aſſeri, ſed geometricè à vobis demonſtrari debuit priuſquam libri titulus in inuidiam vocari: poſſem & ego de Merſenni titulis, verbiſque quibus opera ſua commendat, non pauca queri & arguere; ſed res mihi tanti non eſt; quod tamen gratis aſſerere ne videar, non pigebit hic, verba epiſtolæ nuncupatoriæ, quam mechanicis ſuis præfigit, apponere. *Regulam, circinum, amuſſim, libellam & perpendiculum Architectis & Latomis. Fabris lignariis, runcinam, terebras, ſerras. Agricolis, ſtiuam, rallum & vrpices, quibus occent, lirent, porrâque tranſuerſâ deriuent vligines in collicias. Tritoribus, flagella, tribulaſque; Piſtillos ruido pilo crimnum facientes, molaſque truſatiles, cum metis & catillis emolitoribus. Piſtoribus, mactras at ſphatas. vinitoribus, bidentes, radicas, orcas, præla, lacus, ſerias, ſiphones & epiſtomia. Fæniſecis, demetientes, ſicilienteſque ſeculas. Caſſes & varos venatoribus. Piſcatoribus, verruculum, tragulam, ſagenam, hamum; Aucupibus, illices, amitos, decipulas, pedicas, caueas. Equitibus, ephippia, ſtapetes, calcaria, fræna, paſtomides. Aurigis, petorita, eſſeda, ciſia, ſerraca, trahas, lecticas, ſufflamina, ſucculas. Naucleris, clauum, anchoram, vela, bolidem antblias tribuit. quid opificia reliqua percurram, quæ huic arti ſua inſtrumenta penitus accepta ferunt? vt ne quidem cibum probè coctum, abſque lebetibus, verubus, craticulis, ſartaginibus, trullis, fuſcinis, rutabilis, batillis, tripodibus, radulis. truis, & paropſidibus commodè ſatis parare valeamus.* &c.

Hæc ego cum legerem, dolebam Calepinum aut Nomenclatorem mihi ad manum non eſſe, quos à Merſenno ad artis ſuæ commendationem deſcriptos videbam. cum vero lebetes, trullas, ſartagines, in medium proferri conſpicerem, credebam non abs re, nouam comœdiam inſtitui, cui Ollulariæ aut Patellariæ nomen Plautus imponeret. vereor interim ne ſutoribus, aliiſque eius ſarinæ hominibus, quod artis ſuæ inſtrumenta omiſerit, bilem moueat, præſertim cum ex Nomẽclatore, eodem labore non inconcinnè deſcribi poſſent.

Nihil tamen quod ad rem faciat, præter id quod in ea re hactenus inuentum, protulerit.

ANne & vos Cenſores, qui doctiſſimam & verè Geometricam Merſenni dicitis cenſuram, nihil ab Auctore quod ad rem faciat, præter id, quod ea in re hactenus inuentum eſt, prolatum exiſtimatis? non ita, vt opinor, deſipitis: quæro tamen ex vobis; quis ante, aut præter Auctorem,

progreſſiones geometricas in infinitum excurrentes, certis determinarit limitibus,illarumque terminos exhibuerit?quis ſphæram ad corpus non ſphæricum,ad portionem nimirum cylindricam, quam vngulam vocat, antè vel præter Auctorem reduxerit?quis vngulas cylindricas, circularem & parabolicam,antè illum cubauit? quis cylindro circulari, æquale dedit corpus non cylindricum? quis geometricè curuilinea circularia cum rectilineis comparauit? quis diſſimilibus rationibus perinde ac ſimilibus geometriam vti docuit?atque his omnibus cum viam ſibi ad quadraturas ſternat,nihil ne quod ad rem faciat,præter id quod ea in re hactenus inuentum eſt,protuliſſe videri poteſt?addo,quod in ſolo libro de ductibus,& plura & ſubtiliora in ordine ad quadraturas inuenta dederit, quam ab omnibus ſimul geometris, hactenus allata ſint.plura dicere ſuperſedeo, quia opus ipſum vel leuiter inſpectum, Cenſuræ calumniam ſatis per ſe diluit.

Quippe in illud abit necdum ſolutum problema,quodque forſan longè difficiliorem, quam ipſa quadratura ſolutionem requirit,datis tribus magnitudinibus &c. datiſque duarũ ex illis Logarithmis, tertia Logarithmum Geometricè inuenire.

Nihil igitur Auctor ad rem quod faciat,præter id,quod ea in re hactenus inuentum eſt,protulit, quia in illud abit necdum ſolutum problema, *datis tribus magnitudinibus* &c.quæ inſolens hæc ratiocinatio,quæ concluſio?conſtat nimirum ſibi, & ſui vbique ſimilis eſt cenſura; quæ malè à phœnomenis auſpicata,peius deducta,finit vtique peſſimè.porro Auctorem in illud abire problema,manifeſtè falſum eſſe oſtendi in reſponſione prima ad Cenſorem.

Iudicet nunc Cenſor, & notus ille toti orbi Merſennij Geometra, quã docta & verè geometrica hæc ſit cenſura.

APPENDIX

Ad Danielem Lipſtorpium Lubecenſem.

PRodiit anno 1653,liber,cui titulus *ſpecimina philoſophiæ Carteſianæ*: Auctore Daniele Lipſtorpio Lubecenſi.quem dum,animi causâ,hinc inde peruoluo(neque enim tempus Geometricis debitum, eiuſmodi ſtudiis,ac libris inutilibus vacat,aut lubet impendere)commodum incidi in loca quædam,vbi tum Carteſij, tum ſuum de quadraturæ poſſibilitate iudicium declarat:& illius quidem ſententiam,his verbis exponit: *illud autem in primis in eo*(nimirum Carteſio) *ſuſpiciendum, quod ſolerti mentis acumine,ſine difficultate potuerit determinare,quid humano ingenio peruium eſſet, quid non:an problema aliquod poßibile eſſet,an minus.itaque problema illud adeo vexatum,de circuli quadratura,nunquam aggreſſus eſt;nouerat enim eſſe illud aſtis poſitionibus circumuallatum,vt operam & oleum perderet, quicunque illius ſolutioni ſtuderet:nec triduum immoratus prolixo Gregorij à S. Vincentio volumini, vnicum in eo erroris montem,ex quo reliqui omnes promanarunt, notauit.* Hæc ille:

Duo in hac ſententia aſſeruntur: primum quidem, idcirco Carteſium problema illud adeo vexatum de circuli quadratura, nunquam aggreſſum eſſe, quod noſſet, illud iſtis poſitionibus circumuallatum, vt operam & oleum perderet, quicunque illius ſolutioni ſtuderet, hoc eſt, quia cenſebat humano ingenio quadraturæ ſolutionem eſſe impoſſibilem. alterū, Carteſium non triduum prolixo Auctoris volumini immoratum, vnicum in eo fontem, ex quo reliqui errores promanarint omnes, notaſſe.

Quadraturæ ſolutionem, quod nunquam aggreſſus ſit Carteſius, benè meo iudicio fecit: non quia illam humano ingenio impoſſibilem iudicarit, ſed quia algebræ ſuæ terminos ac limites probe noſcens, illam tam ſublimis problematis ſolutioni imparem videret; communi autem geometriâ idem perficere ſe poſſe deſperaret.

Quam infeliciter autem, ſolerti ſuo mentis acumine, ſine difficultate determinarit, circuli Dimenſionem humano ingenio imperuiam eſſe, præſens hic, & ſequentes edocebunt libri: porro in cæteris, humano ingenio peruia, an ſint, nec ne, determinandis, æque atque in hoc infelix ſi fuerit, videat Lipſtorpius quâ fide ea de Carteſio ſcripſerit, quæ paulo ante recenſui.

Ad alteram ſententiæ partem quod attinet; miror vnicum illum errorum fontem, à Carteſio, tridui ſpatio in prolixo Auctoris opere detectum, aut nulli ab eo indicatum, aut ſi quibuſdam communicarit, ab horum nullo per ſe, aut per alios Auctori obiectum fuiſſe; præſertim cum ab auctoritate Carteſij (quæ apud illos pæne ſupra humanam eſt) non leue momentum res ea habitura fuiſſet. ſi cui autem errorum illum fontem à Carteſio detectum Auctori indicare placuerit, polliceor non tridui, ſed vel vnius diei, & forſan horæ ſpatio oſtenſurum me, quæcunque illa ſint, aut planè eſſe erronea, aut ex mente Auctoris perperam intellecta, dimanaſſe.

Carteſij opinionem, in eiuſdem verba iurare doctus, ſequitur Lipſtorpius, & circuli dimenſionem cenſet impoſſibilem; quia vero aſſertionis ſuæ rationes vel tum ad manus non habebat, (contentus Carteſij auctoritate) vel illis diffidebat, alio loco & tempore, eas ſe prolaturum pollicetur. verum prius quam illas in medium adducat, (quod vehementer opto, & auidè expecto) admonitum illum velim, nihil in hoc argumento perfecturum ſe, niſi geometricam impoſſibilitatis attulerit demonſtrationem: quam ſi dederit, præſtabit aliquid, quod ante illum nemo: porro philoſophicas rationes, & neſcio quas congruentias, adferre, dum de re geometrica pronuntiandum, ineptum planè & abſurdum eſt.

LIBRI SECVNDI FINIS.

ELENCHVS MATERIARVM LIBRI SECVNDI DE PRIMA CIRCVLI QVADRATVRA.

PARS I. *Exponit propoſitiones, quæ à nonnullis in dubium vocatæ, occaſionem dedere, quadraturam circuli primam vitij arguendi.*

PARS II. *Variorum reſpondet obiectionibus.*

RESPONSIO I. *Ad Cenſorem A A, an prima circuli quadratura, abiat in illud Merſennij problema*, datis tribus quantitatibus &c.

DIGRESSIO, *De triplici problematum ſolutione, Mechanica, Conica, Geometrica.*

RESPONSIO II. *Ad R. P. Vincentium Leotaudum, S. I.*

RESPONSIO III. *Ad Clariſſ. virum Chriſtianum Hugenium.*

RESPONSIO IV. *Ad Cenſuram Merſennij.*

APPENDIX *Ad Danielem Lipſtorpium.*

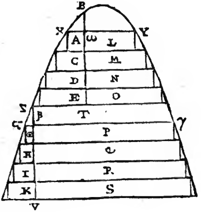
SECVNDA CIRCVLI QVADRATVRA.

PARS PRIMA.

Comparantur ſolida quædam, ex ductu partium parabolicarum in ſeipſas ordinatè ortà, cùm totidem aliis, ex ductu earundem partium in ſe ſubalternè, natis.

PROPOSITIO I.

SInt BT, ZV diametri quæcunque æquales, in parabola ZBY: quibus diuiſis in æquè multas partes æquales, agantur per diuiſionũ puncta normales, cõpleanturque rectangula, quæ ſingula in ſeipſa ducta, intelligantur exhibere paralelopipeda A. C. D. E. G. H. I. K. L. M. N. O. P. Q. R. S.



Dico paralelop. A, ad paral. G, eandem obtinere rationem, quam habet paral. P, ad paral. L: item par. C, eſſe ad par. H, vt paral. Q, eſt ad M: & ſic de reliquis.

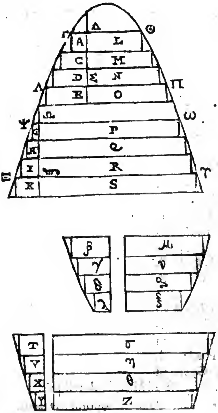
PEr 45 de paral. rectangulum $x\omega y$, æquatur rectangulo $\alpha\beta\gamma$: igitur vt $x\omega$ ad $\alpha\beta$, ita $\beta\gamma$ ad ωy: & vt quadratum $x\omega$, ad quadr. $\alpha\beta$, ita quad. $\beta\gamma$, ad quadr. ωy: ſuntautem quadrata hæc, baſes paralelopip. A, G, P, L: igitur, cum altitudines vtrobique ſint æquales, paral. A eſt ad G, vt paral. P, eſt ad L: ſimiliter oſtendã, C eſſe ad H, vt Q eſt ad M: & ſic de reliquis. quod erat demonſtrandum.

 Corolla-

Corollarium.

HInc ſequitur, proportionem rationis A ad G, ad rationem P ad L, eandem eſſe cum proportione rationis C ad H, ad rationem Q ad M; & permutando, proportionem rationis A ad G, ad rationem C ad H, eandem eſſe, cum proportione rationis P ad L, ad rationem Q ad M; & ſic de cæteris.

PROPOSITIO II.



SInt eadem omnia quæ prius: pars autem parabolæ, cui inſcripta ſunt rectangula A, C, D, E, ſubalternè poſita, ſit βγδλ;

βγδλ; & pars LMNO ſubalternè, ſit μνξζ. pars verò GHIK ſubalternè ſit TVXY: denique pars PQRS ſubalternè, ſit σηθZ.

Dico, paralelop. ex ductu rectanguli A in β, ad paral. ex G in T, eandem habere rationem, quam habet paral. ex P in σ, ad paral. ex L in μ: & ſic de reliquis.

PRoductum ex rectangulo A in β, idem eſt cum producto ex A in E, (figuræ enim β & E, eædē ſunt,) ſed ſolidi ex A in E, baſis eſt rectangulum ſuper ΓΔ, & ΛΣ, ergo idem quoque baſis eſt, ſolidi ex A in β. ſimiliter producti ex G in T, baſis eſt rectangulum ſuper ΨΩ & Ξϖ, & producti ex P in σ, baſis eſt rectangulum ſuper Ωω & ϖΥ: denique producti ex L in μ, baſis eſt rectangulum ſuper ΔΘ & ΣΠ, quia vero per 45 de parab. rectangula ΓΔΘ, ΨΩω ſunt æqualia, erit vt ΓΔ ad ΨΩ, ita Ωω ad ΔΘ. ſimiliter vt ΛΣ ad Ξϖ, ita ϖΥ ad ΣΠ: igitur ratio compoſita, ex ΓΔ ad ΨΩ, & ex ΛΣ ad Ξϖ, æqualis eſt rationi compoſitæ, ex Ωω ad ΔΘ, & ex ϖΥ ad ΣΠ: hoc eſt ratio rectanguli ſuper ΓΔ & ΛΣ, ad rectangulum ſuper ΨΩ & Ξϖ, æquatur rationi rectanguli ſuper Ωω & ϖΥ, ad rectangulum ſuper ΔΘ & ΣΠ: ſed prædicta rectangula, baſes ſunt paralelop. ex A in β, G in T, P in σ, L in μ, & altitudines vtrobique ſunt æquales, igitur vt ſolidum ex A in β, eſt ad G in T, ita P in σ, ad L in μ: ſimiliter oſtendam eſſe, vt C in γ, ad H in V, ita Q in η, ad M in ν & ſic de reliquis. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc ſequitur proportionem rationis paralelop. A ad G, ad rationem P ad L, eandem eſſe, cum proportione rationis, paralelop. A in β, ad G in T, ad rationem P in σ, ad L in μ: & permutando proportionem rationis paralelop. A ad G, ad rationem paral. ex A in β, ad G in T, eandem eſſe, cum proportione rationis, Paral. P ad L, ad rationem paral. ex P in σ ad L in μ; & ſic de reliquis.

Lemma.

EAdem manente figurâ: ſunto rationum AG, CH, DI, EK, denominatores, α, β, γ, δ: & rationum PL, QM, RN, SO, denominatores ι, λ, μ, ν: item rationum Aβ ad GT, Cγ ad HV, Dδ ad IX, Eλ ad KY, denominatores Λ, Π, Φ, Σ: denique rationum Pσ ad Lμ, Qη ad Mν, Rθ ad Nξ SZ ad Oξ denominatores Γ, Δ, Ξ, Θ.

Dico omnes α, β, γ, δ, eſſe ad omnes ι, λ, μ, ν, ſicut omnes Λ, Π, Φ, Σ, ſunt ad omnes Γ, Δ, Ξ, Θ.

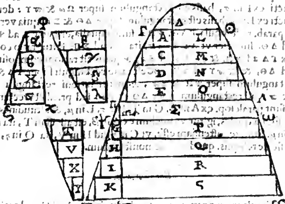
α	β	γ	δ	ι	λ	μ	ν
A	C	D	E	P	Q	R	S
G	H	I	K	L	M	N	O
Λ.	Π.	Φ.	Σ	Γ.	Δ	Ξ	Θ
Aβ.	Cγ.	Dδ.	Eλ.	Pσ.	Qη.	Rθ.	SZ.
GT.	HV.	IX.	KY.	Lμ.	Mν.	Nξ.	Oζ.

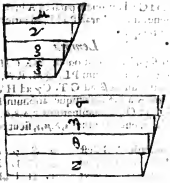
Per coroll. 1. huius, ratio AG, eſt ad rationem CH, vt ratio PL, ad rationem QM: igitur α eſt ad β, vt ι ad λ: rurſum CH ratio, eſt ad rationem DI, vt ratio QM, eſt ad rationem RN: igitur β eſt ad γ, vt λ ad μ: denique DI ratio, eſt ad rationem EK, vt ratio RN, ad rationē SO: quare & γ eſt ad δ, vt μ ad ν.

Iterum per coroll. propoſ. 2. huius: ratio AG, eſt ad rationem Aβ ad GT, vt ratio PL, ad rationem Pσ ad Lμ: igitur vt α ad Λ, ita ι ad Γ: item

item ratio CH, eſt ad rationem Cγ ad HV, vt ratio QM, ad rationem Qη ad Mκ: igitur & β eſt ad η, vt λ ad Δ: item ratio DI, eſt ad rationem Dδ ad IX, vt ratio RN, ad rationem Rθ ad Nς: quare γ eſt ad Φ, vt μ ad Ξ: denique ratio EK, eſt ad rationem Eλ ad KY, vt ratio SO, ad rationem SZ ad Oξ: igitur vt δ ad Σ, ita ν ad Θ. igitur per 2. lib. de Conoidibus Archimedis, omnes α, β, γ, δ, ſunt ad omnes ι, λ, μ, ς, ſicut omnes Λ, Π, Φ, Σ, ad omnes Γ, Δ, Ξ, Θ.

PROPOSITIO III.





Iiſdem poſitis: dico rationem ſolidi ex ductu ΓΔΛΣ in ſe ordinatè, ad ſolidum ex ductu ΦΩΞϖ in ſe ordinatè, eſſe ad

ratio-

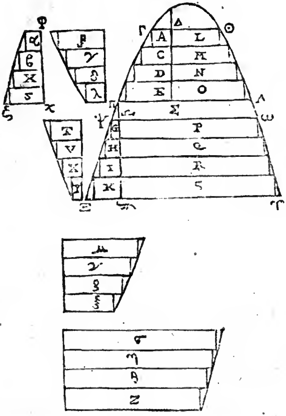
rationem ſolidi, ex ductu ΩωϖΤ in ſe ordinatè, ad ſolidum ex ductu ΔΘΣΠ in ſe ordinatè, ſicut ratio ſolidi ex ΓΔΛΣ in ſe ſubalternè, ad ſolidum ex ΨΩΞϖ in ſe ſubalternè, ad rationem ſolidi ex ΩϖωΤ in ſe ſubalternè, ad ſolidum ΔΘΣΠ in ſe ſubalternè.

F*Acilitatis cauſâ: ſolidum ex* ΓΔΛΣ *in ſe ordinatè vocetur ſolidum* A E *ordinatum; idem vero in ſe ſubalternè, vocetur ſolidum* A E *ſubalternum. & ſic de reliquis, ſumendo primam & vltimam litteram latinam, addendoque ad diſtinctionem, ordinatum vel ſubalternum.*

Per lemma præcedens, aggregatum denominatorum rationum A G, C H, D I, E K, eſt ad aggregatum denominatorum rationum P L, Q M, R N, S O, ſicut aggregatum denominatorum rationum A β ad G T, C γ ad H V, D δ ad I X, E λ ad K y, eſt ad aggregatum denominatorum rationum P σ ad L μ, Q η ad M ν, R θ ad N ρ, S Z ad O ξ. ſi igitur paralelopipeda, inter quæ prædictæ exiſtunt rationes, non auferant plus dimidio ſolidorum, quibus ſunt inſcripta, inſcribantur tot, vt auferatur plus dimidio, & eadem fiat ratiocinatio, hoc modo: aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini, ſunt paralelopipeda inſcripta ſolido A E ordinato, conſequentes vero, ſunt paral. inſcripta ſolido G K ordinato, eſt ad aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini, ſunt paralelop. inſcripta ſolido P S ordinato, conſequentes vero ſunt paral. inſcripta ſolido L O ordinato, ſicut aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini ſunt paralelopip. inſcripta ſolido A E ſubalterno, conſequẽtes vero ſunt paral. inſcripta ſolido G K ſubalterno, eſt ad aggregatum denominatorum rationum, quarum antecedentes termini, ſunt paral. inſcripta ſolido P S ſubalterno, conſequentes vero ſunt paral. inſcripta ſolido L O ſubalterno.

Iiſdem rurſum ſolidis, tam ordinatis quam ſubalternis, tot inſcribantur per ſubdiuiſionem altitudinum æqualium paral. quæ auferant plus dimidio reſiduorum, & eadem continuetur ratiocinatio: euidens eſt, per inſcriptionem illam continuatam, tandem octo illa ſolida exhauriri; & quia altitudines illorum ſolidorum æquales ſunt, eademque in omnibus fit ſubdiuiſio in infinitum, item rationes omnes, quæ exiſtunt inter infinita paralelopipeda, quæ exhauriunt prima quatuor ſolida ex ductu ordinato orta, referuntur & connexæ ſunt, cum omnibus rationibus, quæ exiſtunt inter infinita paralelop. quæ exhauriunt quatuor ſolida ex ductu ſubalterno nata, euidens eſt, vnum ex illis octo, non poſſe dici aut intelligi exhauſtum, quin reliqua omnia ſimul exhauſta eſſe intelligantur.

Igitur aggregatum infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini, ſunt infinita paralelop. quæ vltimatè exhauriunt ſolidum ordinatum A E, conſequentes vero, ſunt infinita paralelop. quæ exhauriunt ſolidum ordinatum G K, eſt ad aggregatum totidem denominatorum, rationum totidem, quarum antecedentes termini, ſunt infinita paralelop. quæ exhauriunt ſolidum ordinatum P S, conſequentes vero ſunt infinita paralelop. quæ exhauriunt ſolidum ordinatum L O: ſicut aggregatum denominatorum infinitorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini ſunt infinita paral. quæ exhauriunt ſolidum ſubalternum A E, conſequentes vero, ſunt infinita paral.



quæ exhauriunt ſolidum ſubalternum GK, eſt ad aggregatum totidem denominatorum, rationum totidem, quarum antecedentes termini ſunt infinita paralelop. quæ exhauriunt ſolidum ſubalternum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ſubalternum L O:

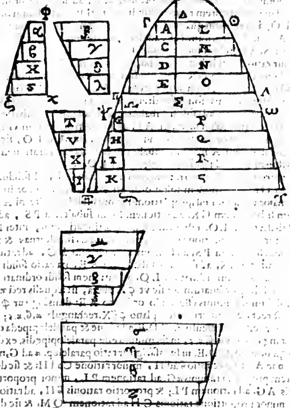
Sed proportio rationis aggregati infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum ordinatum A E, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ordinatum GK, ad aggregatum infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum ordinatum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ordinatum L O, ad rationem aggregati denominatorum infinitorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum ſubalternum A E, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ſubalternum GK, ad aggregatum totidem denominatorum, totidem rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt

hauriunt ſolidum ſubalternum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ſubalternum L O, eadem eſt cum proportione rationis quam habet denominator rationis ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ordinati P S ad ſolidum ordinatum L O; ad rationem quam habet denominator rationis ſolidi ſubalterni A E, ad ſubalternum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O.

Igitur ratio quam habet denominator rationis ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O: eadem eſt cum ratione quam habet denominator rationis ſolidi ſubalterni A E, ad ſubalternum G K, ad denominatorem rationis ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O. igitur ratio ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, eſt ad rationem ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, ſicut ratio ſolidi ſubalterni A E, ad ſol. ſubalternum G K, eſt ad rationem ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O.

Sin verò igitur proportio rationis ſolidi ordinati A E, ad ſolidum ordinatum G K, ad rationem ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, maior vel minor eſt, proportione rationis ſolidi ſubalterni A E, ad ſolidum ſubalternum G K, ad rationem ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O: eſto primum, proportio rationum, inter ſolida ordinata, maior proportione rationum, inter ſolida ſubalterna: & ſit, vt ratio ſolidi ſubalterni P S, ad ſolidum ſubalternum L O, ad rationem ſolidi ſubalterni G K, ad ſolidum ſubalternũ A E, ita ratio ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, ad rationem ſolidi ordinati G K, ad aliud ſolidum ordinatum ας, ſic vt φX recta, ſit æqualis rectæ ΔΣ: patet ſolidum ας, minus eſſe ſolido ordinato A E: diuiſâ igitur φX, vt diuiſa eſt recta ΔΣ, inſcribantur plano φζX, rectangula α, ϐ, κ, ς; patet hæc minora eſſe rectangulis A, C, D, E, adeóque & paralelopipeda ex ductu rectangulorum α, ϐ, κ, ς, in ſe, minora eſſe paralelopipedis ex ductu rectangulorum A, C, D, E, in ſe ipſa. igitur ratio paralelop. α ad G, minor eſt ratione A ad G; & ratio ϐ ad H, minor ratione C ad H; & ſic de cæteris: item proportio rationis α G, ad rationem P L, minor proportione rationis A G, ad rationem P L; & proportio rationis ϐ H, ad rationem Q M, minor proportione rationis C H ad rationem Q M; & ſic de cæteris. igitur & ratio aggregati denominatorum, rationum α G, ϐ H, κ I, ς K, ad aggregatum denominatorũ rationum P L, Q M, R N, S O, minor eſt, ratione aggregati denominatorum, rationum A G, C H, D I, E K ad aggregatum denominatorum, rationum P L, Q M, R N, S O: quod cum in omni ſubdiuiſione fiat in infinitum; igitur ratio infinitorum denominorum, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum φζX, conſequentes, vero exhauriunt ſolidum G K, ad infinitos denominatores, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum L O, minor eſt ratione infinitorum denominatorum, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini, exhauriunt ſolidum A E conſequentes vero exhauriunt ſolidum G K, ad infinitos denominatores, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum L O. igitur etiam minor eſt ratione infinitorum denominatorum, rationum infinitarum, quarum antecedentes termini, exhauriunt ſolidum ſubalternum A E,

 conſe-



conſequentes vero exhauriunt ſolidum ſubalternum GK, ad infinitos denominatores, infinitarum rationum, quarum antecedentes termini exhauriunt ſolidum ſubalternum P S, conſequentes vero exhauriunt ſolidum ſubalternum L O:

Eſt autem ex conſtructione, ratio ſolidi ordinati $\phi \zeta X$ ad ſol. ordinatum G H ad rationem ſolidi ordinati P S, ad ſolidum ordinatum L O, vt ratio ſolidi ſubalterni A E, ad ſubalternum G K, eſt ad rationem ſolidi ſubalterni P S, ad ſol. ſubalternum L O; adeoque ratio denominatoris rationis ſolidi ordinati $\phi \zeta X$, ad ſol. ordinatum G K, ad denominatorem rationis ſol. ordinati P S ad ſol. ordinatum L O, eadem cum ratione denominatoris rationis ſolidi ſubalterni A E, ad ſubalternum GK, ad denominatorem rationis ſolidi ſubalterni P S, ad ſubalternum L O;

Igitur in nulla ordinata ſubdiuiſione, & corporum inſcriptione in his

octo

octo ſolidis,erit reperire proportionem vnam denominatorum, rationum quæ exſtunt inter inſcripta corpora, quæ æqualis ſit proportioni denominatorum rationum,quæ exiſtunt inter tota ſolida, quibus ordinatè corpora illa inſcripta ſunt,ſed hâc ſemper minorem: quod abſurdum & impoſſibile. igitur proportio rationum inter quatuor ordinata ſolida, AE, GK, PS, LO, non eſt maior proportione rationum,inter quatuor ſolida ſubalterna AE, GK, PS, LO: ſimiliter oſtenditur,quod illa non ſit minor hâc, æqualis igitur vt ſit neceſſe eſt.

Reſpondetur variorum obiectionibus.

PRopoſitionem præcedentem,duplici aliâ methodo demonſtrauit Auctor,lib.10.oper.Geom.propoſ.61.quarum vna ad normam Archimedeæ,quæ 2.eſt de conoid.exacta eſt: hanc diuerſimodè oppugnant varij, ſed vt mox oſtendam,nullo operæ pretio.& primùm quidem

Contendit Cenſor AA, illam nullo modo ad normam Archimedeæ inſtitutam eſſe,adeoque non ſubſiſtere:*non enim*, inquit, *eſt vt P ad Q ita A ad C, & C ad D,vt Q ad R*:(vid.fig.præced.) *& ſic de cæteris:quod ad Archimedæam requiritur* &c.At non aduertit Cenſor, Archimedem quatuor tantum vti magnitudinum ordinibus, quas per rationes ſimplices certâ lege inter ſe connectit; Auctorem verò, octo adhibere quantitatum ordines,quas per rationum ſimplicium proportiones, eadem lege colligat, quâ ſuas Archimedes per rationes ſimplices; adeoque demonſtrationem propoſ.61.lib.10.oper. Geom. nil aliud eſſe, quam Archimedæam proportionibus applicatam;ac proindè nec poſſe,nec debere eſſe: *vt P ad Q ita A ad C, & C ad D vt Q ad R*, ſed rationem AG debere eſſe ad rationem CH, ſicut PL ratio eſt ad rationem QM; item rationem CH eſſe ad rationem DI, ſicut ratio QM eſt ad rationem RN: quidquid enim per rationes ſimplices,determinatarum quantitatum, de aggregatis ipſarum quantitatum inferri poteſt, idem poteſt de duplo pluribus quantitatum aggregatis,per rationum ſimplicium proportiones, ſi eâdem lege,quâ ſimplices rationes, inter ſe ordinatæ ſint. hoc vbi maturè expendeſſet Cenſor,tum non ad friuolam aſſertionem, nulli innixam argumento,ſed ad geometricam veniat demonſtrationem, ſi quid opponendum ſit.

Alio eandem demonſtrationem propoſ.61.argumento oppugnat nonnemo:*vt*, inquit,*legitima ſit demonſtrationis illius ſequela, deberent rationes omnes AG, CH, DI, EK ſimul ſumptæ, æquari vni rationi,quam habet aggregatum quantitatum A,C,D,E,ad aggregatum G,H,I,K, & ſic de cæteris*; tum id falſum eſſe magno molimine demonſtrat. & verò eſt falſiſſimum; imò impoſſibilis eſt caſus,in quo id poſſit contingere,niſi quando rationes illæ omnes,commune habent conſequens:neque ad hoc demonſtrandum tanto opus erat apparatu, cùm per ſe clarum ſit; at hoc demonſtrari debebat,quòd vt legitima Auctoris eſſet demonſtratio, *debeat ratio aggregati quantitatum A,C,D,E, ad aggregatum, G,H,I,K, æqualis eſſe rationibus omnibus AG, CH, DI, EK ſimul ſumptis*:quo nihil minus factum eſt; neque porrò fieri poteſt,cum falſum ſit, & argumentum inde petitum,æque ſecundam de conoid. Archimedis, & 12. 5. Euclidis,ac propoſ.61. Auctoris impugnet.

Eandem rurſus demonſtrationem,ingenti labore examini ſubiecit A-

 lexius

lexius Syluius: atque vbi ſex paginas geometrico illius examini, fruſtra ſe impendiſſe aduertit, *hucuſque*, inquit, *proceſſimus*, *vlterius non occurrit quomodo geometricè oſtendatur, ratio F ad H, maior quam G ad I* (id eſt proportio rationum inter aggregata paralelop. inſcriptorum quatuor ſolidis ex ductu ordinato, maior proportione, rationum inter aggregata paralelop. inſcriptorum ſolidis ex ductu ſubalterno) *licet per numeros talis inueniatur.*

Porro examen per numeros inſtitutum, vti geometrico, multò fuit laborioſius, (nam paginas complures cyfris onerauit) ita infelicius ſucceſſit: quod ſingillatim hîc oſtendere, nec operæ duxi pretium, nec tantum temporis illi lubuit impendere. præterquam enim, quod illius conſtructio, quæ fit per diuiſionem axis parabolæ in decem partes lateri recto æquales, nullo modo conueniat cum conſtructione Auctoris, quæ duas ſumit diuerſas diametros æquales, & quaſcunque, numeri quos pro quantitatibus in Auctoris propoſitione 61, libr. 10 repertis ſupponit, planè abſoni ſunt, & nullam proportionem habent earum, quæ quantitatibus illis communes ſunt, & ex quibus veluti præmiſſis, tota demonſtrationis concluſio dependet: oſtenderat Auctor, rationem paralelop. A ad paralelop. G, eandem eſſe cum ratione par. P ad par. L: item rationem C ad H, eandem eſſe cum ratione Q ad M; & ſic deinceps: vnde ſequitur A ductum in L, æquari G ducto in P, & C in M, æquari H in Q: &c. quorum neutrum conuenit numeris ab Alexio Syluio pro quantitatibus in Auctoris propoſitione repertis, ſuppoſitis: vt hic in adiuncto ſcemate eſt videre. nam numerus A, ductus in numerum L, longè aliam ac diuerſam producit ſummam, quam G numerus ductus in numerum P. vnde non eſt numerus A ad numerum G, vt numerus P, ad numerum L. ſimiliter oſtenditur, numerum C, ductum in numerum M, non idem producere, quod H numerus ductus in numerum Q: & ſic de reliquis; vnde mirum non eſt, quod ex numeris non proportionalibus concluſionem inferat, diuerſam ab ea, quam Auctor ex quantitatibus infert proportionalibus. idem error eſt in reliquis omnibus numeris, tum quos eadem paginâ, tum ſequentibus tribus proponit, vanum igitur ac nullum eſt Alexij Syluij examen.

A.41421356.	L. 241421356
C.73205080.	M. 273205080
D.100000000.	N. 300000000
E.123606797.	O. 323606797
G.21321355	P. 468534949
H.40968334	Q. 488181928
I.59235915	R. 506449509
K.76393203	S. 523606797.

A in L

9999999932878736

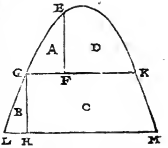
G in P

9989799977535895

Aliter & accuratius ſecundam hanc quadraturam excuſſit R. P. Leotaudus: qui relictâ Auctoris propoſ. 61. (quæ tantum agit de proportionibus rationum, inter aggregata paralelopipedorum inſcriptorum octo ſolidis) ſequentem id eſt 62, quæ agit de proportionibus rationum, quæ ſunt inter ſolida tota, ſibi hâc methodo examinandam aſſumpſit.

Eſto parabola E G L M, in qua aſſumptis duabus diametris æqualibus, E F, G H: ducantur ad illas normales G K, L M; tum (omitto reliquas lineas in ſyſtemate ab illo conſtructo expreſſas, quod inſtituto meo non inſeruiant) ex data linearum aliquot in ſyſtemate deſignatarum

quantitate in numeris, reliquarum colligit in numeris quantitatem. dein ex nota linearum illarum in numeris quantitate, plana ipſa A, B, C, D, &c. in numeris nota facit. ex his denique ipſa ſolida A, B, C, D, ex ordinato ductu orta in numeris exhibet: quia vero rationes, quatuor ſolidorum A, B, C, D, ex ſubalterno ductu ortorum, præciſè numeris exprimi non poſſunt; vtpote quæ dependeant ab exacta perimetri, atque areæ circularis dimenſione, verorum numerorum loco, ſupponit, alios quidem iuſto maiores, alios minores: tum ſic argumentatur; ſi ratio ſolidorum ordinatorum A ad B, ſit ad rationem ſolidorum ordinatorum C ad D, vt ratio ſolidorum ſubalternorum A ad B, eſt ad rationem ſolidorum ſubalternorum C ad D, igitur proportio rationis ordinatorum A ad B, ad rationem ordinatorum C ad D, eadem eſt cum proportione rationis ſubalternorum A ad B, ad rationem ſubalternorum C ad D: cum autem, tam quatuor ſolida ordinata A, B, C, D, quam ſubalterna numeris exhibita ſint, adeoque & illorum rationes, reducantur duæ rationes ordinatorum ad commune conſequens erunt antecedentes termini in minimis numeris exhibiti, K & L: adeoque ratio ordinatorum A ad B, erit ad rationem ordinatorum C ad D, vt K ad L: idem fiat de rationibus ſubalternorum, quæ reductæ ad commune conſequens, habebunt antecedentes terminos, his numeris (ſiue iuſto maioribus ſiue minoribus perinde eſt) expoſitos M. N: eritque ratio ſubalternorum A ad B, ad rationem ſubalternorum C ad D, vt M eſt ad N: igitur ſi vera eſt propoſ. 62. Auctoris, erit K ad L vt M ad N: & K in N, æquale M in L: eſt autem ex K in N, productum P, & ex M in L, productum Q, igitur P æquale eſt ipſi Q: quod tamen manifeſtè, patet falſum eſſe. non igitur vera eſt Auctoris propoſ. 62, adeoque cum huic tota innitatur quadratura, neceſſe eſt & hanc corruere.



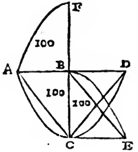
K 30375 L 38342
M 3180870 N 3477565

P 105648229125
Q 121960917540

Hæc eſt ratiocinatio viri doctiſſimi, quæ legitimè contra Auctorem oper. Geom. concludit, ſi in præmiſſis peccatum non ſit: porro vbi, & in quo peccatum ſit, adeoque vnde inæqualitas illa proportionalitatis, cuius denominatores ſunt P & Q, orta ſit, melius vt intelligatur.

Aduertendum eſt, in quo differat ductus plani in planum, ex quo Auctor ſua format ſolida, à multiplicatione numeri per numerum, qui loco planorum ſupponuntur, vt productus ex illa numerus, ſolidum exhibeat: nimirum in hoc differt: quod Auctoris ductus, ita dependeat à figura & ſitu planorum, quæ in inuicem ducuntur, vt alterutro mutato, aliud & mole diuerſum à priori oriatur ſolidum; iidem vero numeri quomodocunque in ſe inuicem ducti, idem ſemper producant: quod exemplis ſic oſtendo. & primò quidem in eo ductu, in quo eâdem ſeruatâ figurâ, ſo-

lus



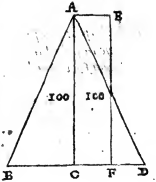
lus ſitus mutatur. eſto triangulum rectangulum ABC, hoc ductum in ſe ordinatè, ſiue in triangulum BDC, producit pyramidem, duplam eius, quæ oritur ex ductu trianguli eiuſdẽ ABC, in ſe ſubalternè, ſiue in triangulum BCE. ſit ergo triangulum ABC numeris expreſſum 100, erit etiam tam BDC, quam BCE triangulũ, in numeris 100: at 100, in 100 idẽ ſemper producit, igitur triangulum ABC, 100, ſiue ducatur in triangulum BDC, ſiue in BCE (cum vtrũque in numeris ſit 100) idem producet: quod tamen eſt falſum; cum ABC triang. ductum in BDC, producat duplum eius, quod ABC in BCE. alius igitur eſt ductus plani in planum, ex quo Auctor ſua format, & producit ſolida, alia multiplicatio numeri in numerum, qui loco planorum ſupponuntur, ex qua numerus productus ſolidum exhibet. quæro modo: ſi aliundè notum non eſſet quod triangulum ABC, ductum in triangulum BDC, aliud ſolidum, & quidem duplum producat illius, quod oritur ex ductu eiuſdem trianguli ABC, in triangulum BCE; & triangulis illis ABC, BDC, BCE in numeris deſignatis, nimirum ſingulis 100, quis vélit exhibere in numeris ſolida, quæ oriuntur ex ductu trianguli ABC in BDC, vel in æquale BCE, an non idem in numeris inueniet ſolidum, ex ABC in BDC, cum eo quod oritur ex ABC in BCE? plane idem. & tamen iuxta ductum Auctoris, illud, duplum eſt huius. an igitur précisè ex triangulis illis, in numeris notis, exhiberi in numeris non poterit differentia, inter ſolidum ex ABC in BDC, & ſolidum ex ABC in BCE, ſuppoſito quod aliundè non innotuerit? poteſt omnino: at quî numeri plana illa exhibentes diſponi debeant, myſterium eſt; quod hactenus eos omnes latuit, qui quadraturas ad Arithmeticæ tribunal vocauere.

Rurſum parabola ACB, ducta in ſe ordinatè, ſiue in parabolam BCD, producit ſolidum, æquale cubo, determinatam habenti baſem & altitudinẽ: eadem vero párabola ACB, ducta in ſe ſubalternè, ſiue in parabolam CBE, ſolidum producit, æquale ſemicylindro determinatam habenti baſim & altitudinem: quæ duo ſolida, non modo figurâ, ſed ita magnitudine & mole differunt, vt qualis inter ea ſit ratio hactenus non innotuerit. porro parabolas eaſdem in numeris notas, ſi iuxta numerorum leges in inuicem ducas, idem ſemper in numeris exhibebitur ſolidum.

Iterum parabola ABC, ſi ſecundum diametros axi paralelas ducatur in ſe, ſeu in parabolam AFB, aliud plane ſolidum, & mole diuerſum ab eo producet, quod oritur ex eadem parabola ducta iuxta ordinatim ad axem poſitas, in ſe, ſiue in parabolam BCD.

Secundò, in eo ductu, in quo eodem ſeruato ſitu, ſola figura mutatur: eſto ABC triangulum rectangulum cuius area innumeris deſignata ſit 100; huic æquale & in eadem altitudine adſcribatur rectangulum

ACFE;



ACFE;erit huius area in numeris 100: ſi igitur in numeris, iuxta leges Arithmeticæ, quæras ſolidum ex ductu trianguli ABC in ſe: idem orietur ſiue triangulum ABC, ducas in ſe ipſum, ſiue in triangulum ACD, ſiue in rectangulum ACFE: & tamen iuxta ductus Auctoris, triangulum ABC in ſe, vel in ACD ductum, planè aliud producit ſolidum, & mole diuerſum ab eo, quod oritur ex ductu trianguli ABC in rectangulum ACFE:

Rurſum aliud ac diuerſum mole oritur ſolidum, ex ductu rectanguli AECF in ſe, quam ex ductu trianguli ABC in ſe, licet illius area huius areæ ſit æqualis.

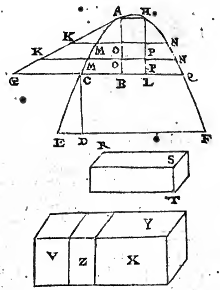
His rectè perceptis, *Dico* primam cauſam inæqualitatis inter P & Q, hoc eſt inter proportionem rationum, quæ ſunt inter quatuor ſolida, ex ductu ordinato orta, & proportionem rationum, quæ exiſtunt inter quatuor ſolida, ex ductu ſubalterno orta, inde natã eſſe; quod (vt ipſe P. Leotaudus rectè aduertit) proportio rationum, quæ ſunt inter ſolida ex ductu ſubalterno orta, veris ac præciſis numeris exprimi non poſſit, quia illa dependet ab acurata perimetri, & areæ circularis dimenſione, quam veris ac præciſis numeris exhibere nondum contigit; alia vero proportio rationum inter corpora ex ductu ordinato nata veris ac præciſis numeris exhiberi poſſit & exhibita ab ipſo ſupponatur: vnde, planè neceſſe eſt, inter vtramque illam proportionem, numeris exhibitam, inæqualitatem aliquam intercedere.

Secunda & maxima cauſa inæqualitatis, inter numeros P & Q, eſt, quod P. Leotaudus quantitates arearum, planorum, ex quorum ductu ſua format corpora, tantum conſiderarit, numeroſque, quibus illas expreſſerat, in ſe ipſos, vel in alios iuxta conſuetas arithmeticæ leges duxerit, nullâ habitâ ratione, in pleriſque figuræ aut ſitus planorum, à quibus tamen ita dependet Auctoris ductus, vt alterutro mutato, aliud planè & mole diuerſum oriatur ſolidum, vt ante demonſtraui: vnde mirum non eſt, quod tanta inæqualitas inter proportiones P & Q reperiatur, cum in ductibus pæne ſingulis, ex quibus octo illa ſolida nata ſunt, peccatum ſit. idem error commiſſus eſt in numeris, quibus ſolida, eorumque proportiones, in duabus reliquis quadraturis, deſignat. nihil igitur contra quadraturas euicit R.P. Leotaudi examen.

PARS SECVNDA

Reductio partium parabolicarum, tum ordinatè tum ſubalternè in ſe ductarum, ad alia ſolida, notam habentia altitudinem, & baſim determinatam.

PROPOSITIO IV.



Sint A B, C D diametri quæcunque æquales, in parabola A E F: actiſque per B & D normalibus C Q, E F, ducatur A H, paralela C Q:

Oportet ſolida orta ex ductu ordinato partium A C B, B A H Q, C E D, D C Q F in ſe ipſas, reducere ad nota corpora.

Demonſtr.

Agatur per A, contingens A G, occurrens C Q productæ in G; ponanturque rectæ K M N, paralelæ G Q; & H L, paralela A B: per 89 de parab. rectæ M K, M O, O P ſemper ſunt continuè proportionales; igitur per 45 de ductibus, mixtilineum A G C M A, ductum in altitudi-

altitudinem O P, æquatur parti A C B ductæ in ſe: quia vero quadrata eſt parabola A G C, fiat illi æquale rectangulum R S: erit hoc ductum in altitudinem S T, æqualem O P, æquale mixtilineo A G C in O P, hoc eſt parabolæ A C B ductæ in ſe.

Eâdem methodo, reducetur pars C E D ducta in ſe, ad paralelopipedum notum:

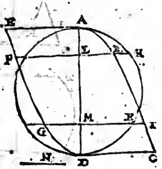
Rurſum pars parabolica C A H L ducta in ſe æquatur C A B in ſe, A H B L in ſe, & A C B, bis in A H B L, per 199 de ductibus: at A H B L in ſe, producit paralelop. cuius baſis eſt quadratum A H, & altitudo A B: ſit illud paralelop. V. & C A B in ſe, producit paralelop. R S T, fiat igitur paralelop. R S T æquale paral. Z, in eadem altitudine cum paral. V: erit aggregatum paral. V, Z, æquale ſolidis duobus, ex A C B, A H B L in ſe ipſa: iterum fiat vt A B ad duplam A H, ita rectangulum R S ad rectang. Y. erit Y ductum in altitudinem A B, æquale rectang. R S in duplam A H, hoc eſt paralelop. X, æquale parabolæ A C B ductæ in duplam A H. totum igitur paralelop. V Z X, æquatur C A H L ductæ in ſe.

Eâdem prorſus methodo reducetur corpus ex ductu D C Q F in ſe, ad notum paralelopipedum: fecimus igitur &c. quod erat propoſitum.

Corollarium.

Hinc patet praxis, quâ quatuor illa ſolida, ex ductu ordinato orta, reduci poſſint, ad alia corpora nota, eandem habentia altitudinem; adeoque innoteſcere poſſit proportio, quæ exiſtit inter duas rationes, quarum termini ſunt illa quatuor ſolida.

PROPOSITIO V.

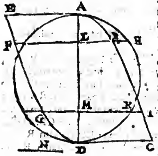


Sint A G D, A D E parabolæ duæ æquales, & ad eundem axem A D, ſubalternè poſitæ: deſcriptoque ſuper A D, vt diametro, circulo A H K D, ponantur duæ quæuis normales, H F, I G ad axem A D: fiatque vt H L, ad B L ſic L F ad N.

Dico ſegmentum circulare H L K M, ductum in altitudinem N, æquari parti parabolicæ B L I M, ductæ in partem F L M G.

Demonſtratio.

Per 67. lib. 10. oper. Geom. vt H L ad K M, ita B L F rectangulum eſt ad rectang. I M G: ſed etiam vt H L ad K M, ita rectang. ſuper H L & N, ad rectang. ſuper K M & N, igitur vt B L F rectang. ad rectang. I M G, ita H L N rectang. ad rectang. K M N; eſt autem per conſtr. rectang.

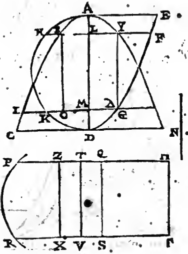


ctang. B L F, æquale rectang. H L N, igitur & I M G rectang. æquatur rectang. K M N: quod, quia ſemper fit in omnibus rectangulis, quotcunque ducantur paralelæ, manifeſtum eſt per exhauſtionem factam in 45 de ductibus, ſegmentũ circulare HLKM, ductum in altitudinem N, æquari parabolæ B L M I, in parabolam FLMG. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EAdem methodo demonſtratur, totum ſemicirculum A H K D, ductum in altitudinem N, æquari paraqolæ A B C D, ductæ in parabol. A E G D.

PROPOSITIO VI.



EAdem figura poſitâ, dimittatur ex B, diameter B O, occurrens I G lineæ in O.

Opor-

Oporteat ſolidum ex I B O in ſe ſubalternè, reducere ad partem cylindricam, determinatam habentem baſim & altitudinem.

Demonſtratio.

ESto P R S Q ſegmentum circulare, idem cum H L K M: adeoque ductum in altitudinem N, ſit æquale parti I B L M, ductæ in ſe ſubalternè. per 199 de ductibus, pars I B L M in ſe ſubalternè æquatur parti I B O in ſe ſubalternè, B O L M in ſe, vna cum I B O, bis ductæ in B L O M: cum igitur B L O M in ſe, producat totum paralelopip. habens altitudinem B O; & pro baſi quadratum B L, fiat rectang. T Q S V, quod ductum in altitudinem N, ſit æquale B L O M ducto in ſe. item cum quadrata ſit parabola B I O, ſi huic rectangulum fiat æquale, & ducatur in duplam B L, erit hoc æquale parabolæ I B O, bis ductæ in B L O M: fiat igitur rectangulum Z T Y X, quod ductum in altitudinem N, ſit æquale I B O, ducto in duplam B L: erit igitur rectangulum totum Z Q X S in altitudinem N, æquale B L O M ducto in ſe, vna cum I B O, bis ducto in B L O M: totum autem P Q R S in N, æquatur I B L M in ſe ſubalternè, hoc eſt B D O M in ſe, I B O bis in B L O M, vna cum I B O in ſe ſubalternè: igitur reſiduum ſegmentum circulare P Z R X, in altitudinem N, æquatur reſiduo I B O, ducto in ſe ſubalternè. fecimus igitur &c. quod erat præſtandum.

Corollarium.

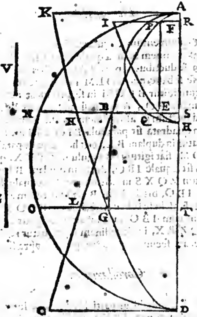
EAdem methodo exhibebitur parti I B Y λ in ſe ſubalternè, ſolidum æquale cylindricum: nam I B Y λ in ſe ſubalternè, æquatur I B L M in ſe ſubalternè (hoc eſt P Q R S in altitudinem N) vna cum L Y M λ in ſe, & I B L M bis in L Y M λ. ſed I B L M bis in L Y, & L Y M λ in ſe, producunt nota paralelopipeda, ſi his æquale fiat rectangulum Q S π Γ in altitudinem N, patet ſegmentum P R π Γ in altitudinem N, æquari I B Y λ in ſe ſubalternè.

PROPOSITIO VII.

SInt F E, B G diametri quæcunque æquales, in parabola A B C D: ducanturque per E, & G, normales ad axem, B S, L T.

Oportet oſtendere, corpora ex ductu partium F B E, L B G in ſe ſubalternè, & reducta ad fruſta cylindrica, habere diuerſas altitudines, & pro baſibus, ſegmenta circularia diuerſorum circulorum; vtrumque autem oporteat determinare.

Demonſtratio.



DVctâ FR normali ad axem, ſumptâque SH æquali AR; ducatur HEI parabola (cuius axis AH & vertex H) æqualis & ſubalternè poſita ipſi AFB: dein ſuper AH vt diametro, deſcribatur ſemicirculus APQH: fiatque vt PR ad FR, ſic IR ad V. per 5. huius, erit RPQS ſegmentum circulare, ductum in altitudinem V, æquale parti parabolicæ RFBS in ſe ſubalternè, & per præcedentem propoſ. pars BFE in ſe ſubalternè, æqualis parti cylindricæ, cuius altitudo eſt V, & baſis pars ſegmenti PRQS, determinata.

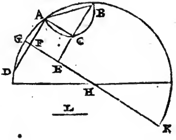
Rurſum ſumatur TD, æqualis AS, & ſuper AD vt diametro, deſcribatur ſemicirculus, ducaturque parabola DGK, æqualis, & ſubalternè poſita, parabolæ ACD: fiatque, vt NS ad BS, ſic MS ad Z: per 5 huius, ſegmentum circulare NOST, ductum in altitudinem Z, æquale eſt parabolæ LBST, ductæ in ſe ſubalternè. & per propoſ. præced. pars LBG in ſe ſubalternè, æquatur fruſto cylindrico, cuius altitudo eſt eadē Z, & baſis, pars determinata ſegmenti circularis NOST. igitur oſtendimus &c. quod erat faciendum.

Nota

VT ex iis quæ hucuſque poſita ac demonſtrata ſunt, facilius circulus ad quadrum reduci poſſit, lemmata nonnulla & animaduerſiones ſubiungo, quæ quidem

quidem ad rem quam agimus, neceſſaria ſunt, ſed eiuſmodi tamen, quæ quiuis geometra facilè per ſe expedire poſſet:

Lemma I.

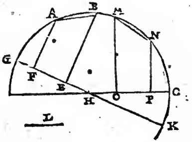


D*Ato arcu A B, qui minor, ſit ſemiperipheria ſui circuli illi tamen commenſurabilis.*

Oportet inuenire diametrum GK, ad quam, ſi ab extremitatibus arcus dati, dimittantur normales, intercipiant lineam in diametro, datæ rectæ L æqualem; oportet autem rectam L, non maiorem eſſe linea AB.

SVper recta AB vt diametro, deſcribatur ſemicirculus ACB, in quo aptetur AC æqualis datæ L. ducaturque BC. cui ex A, ponatur paralela AD: vel igitur AD continget circulum DBK, vel ſecabit: ſi prius, patet AC, quæ normalis eſt ad AD, productam tranſire per centrum H, adeoque in AC linea, problema abſolui. ſi poſterius: diuidatur AD bifariam in F, & per FH ducatur normalis GK. patet illam tranſire per centrum H, & BC productam ſecare in E ad angulos rectos, adeoque illam diametrum eſſe, quam lemma poſtulat.

Lemma II.



D*Ata quauis L, quæ minor ſit dato diametro DC, ſemicirculi DAC:*

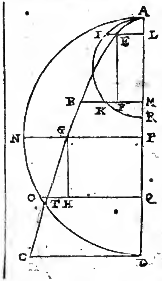
Oportet exhibere arcum MN, circulo ſuo commenſurabilem; à cuius extremitatibus dimiſſæ normales ad diametrum datam CD, intercipiant in ea partem OP, datæ L æqualem.

PEr lemma præcedens, ſumatur arcus AB commenſurabilis ſuo circulo, cuius ſubtenſa AB, non ſit minor datâ rectâ L, inueniaturque diamete-

meter GK, ad quam ex A & B dimiſſæ normales, intercipiant partem FE, datæ L æqualem: tum HE lineæ, ſumatur æqualis HO, & FG æqualis PC; eriganturque ex O & P, normales ad diametrum DC, intercipientes arcum MN, dico illum eſſe qui quæritur. cum enim HC, HG ſemidiametri ſint æquales, item OH, EH, & OM normalis ad ſuam diametrum, ſicut EB eſt ad ſuam, erunt OM, EB æquales: ſimiliter æquales ſunt rectæ PN, FA; item OP, FE: igitur arcus MN æquatur arcui AB; ſed AB ex hypoteſi commenſurabilis eſt ſuo circulo DBC, igitur & arcus MN, eidem eſt commenſurabilis: rectæ inſuper MO, NP, ſunt normales ad DC diametrum, & OP linea intercepta, eſt æqualis rectæ FE, hoc eſt datæ L, factum igitur eſt quod petebatur.

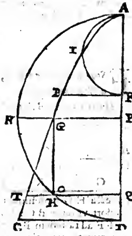
Scholion.

QVoniam in præcedentibus propoſitionibus omnibus, aſſumptæ fuere in parabola diametri duæ æquales quæcunque, certum eſt quidquid de illis demonſtratum eſt, etiam verificari in diametris duabus æqualibus, quas mox ex lemmate præced. determinabo. imo cum abſque hac diametrorum determinatione difficulter quadratura vlterius quam Auctor fecerit, deduci poſſit, maximè velim propoſitiones omnes partis primæ & ſecundæ huius, de iis diametris æqualibus, & parabolarum partibus intelligi, quas iam determinabo.



Eſto ABC parabolæ axis AD: ſumptâque in illo parte quâuis AR, deſcribatur ſuper illa vt diametro, ſemicirculus AIR; in quo ſumatur arcus quiuis IK, commenſurabilis peripheriæ AIR; ducanturque, IL, KM normales ad AR, dein alius deſcribatur quiuis ſemicirculus AND, cuius perimeter ſit commenſurabilis perimetro AIR; tum per lem. 2. inueniatur in perimetro AND, arcus aliquis NO, commenſurabilis peripheriæ AND, à cuius extremitatibus, eductæ normales NP, OQ, intercipiant partem diametri PQ, æqualem parti LM; denique ex punctis E & G in quibus parabolam ſecant lineæ IL, NP, ducantur normales EF, GH: erunt illæ æquales rectis LM, PQ, adeoque & inter ſe; & diametri, ac partes parabolicæ BEF, TGH, illæ, de quibus præcedentes & ſequentes propoſitiones velim intelligi.

Rurſus ſit AIR ſemicirculus, deſriptus ſuper AD axe parabolæ ACD; ſit autem & ſemicirculus alius AND priori maior, ſic vt perimeter AIR ſit commenſurabilis perimetro AND: tum per lem. 2. inueniatur in perimetro AND, arcus NO, commenſurabilis perimetro AND



AND, à cuius extremitatibus N& O, eductæ normales ad axem AD, intercipiant in illo partem PQ, æqualem diametro AR: ducaturque ex G puncto interſectionis, recta GH, paralela axi AD. erunt rurſus AR, GH diametri æquales, & partes parabolicæ ABR, GTQ, vt prius determinatæ:

Caſum hunc, à priori diſtinxi; eo quod dum vna æqualium diametrorum eſt axis parabolæ, veluti hic eſt ◡AR, pars parabolica BAR, ducta in ſe ſubalternè, producit corpus æquale ſemicylindro cuius baſis eſt ſemicirculus ◡AIR. in priori vero caſu, quia EF non eſt axis, ſed diameter ſecundaria, pars parabolica BEF, ducta in ſe ſubalternè, producit fruſtum cylindri, cuius baſis eſt ſegmentum aliquod ſemicirculi AIR.

Lemma III.



Datæ ſint tres quantitates quæcunque, G, H, K; & ponatur quarta L, æqualis ipſi K, & inter G & L, quæuis ponatur quantitas ω.

Dico proportionem rationis GH ad rationem HK, eſſe ad proportionem rationis Gω ad rationem ωL, ſicut ω ductum in ω, ad H ductum in H.

VT ratio GH, ad rationẽ HK, ita G ductum in K, ad H ductum in H per 84:l.8. ſimiliter vt ratio Gω ad rationem ωL, ita G ductum in L, ad ω ductum in ω. igitur vt ratio G ducti in K, ad H in H, ad rationem G ducti in L ad ω ductum in ω, ita proportio rationis GH ad rationem HK, ad proportionem rationis Gω, ad rationem ωL; ſed ratio G ducti in K, ad H in H, eſt ad rationem G ducti in L (hoc eſt iterum G ducti in K) ad ω in ω, vt ω ductum in ω ad H ductum in H per 7. de proport. igitur vt ω ductum in ω, ad H ductum in H, ita proportio rationis GH ad rationem

tionem HK, ad proportionem rationis G ad rationem L. quod erat demonſtrandum.

Lemma IV.

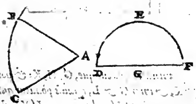
ESto ratio BC ad BA, ad rationem EF ad ED, vt HK linea ad lineam HG.

Dico rationem BC ad CA eſſe ad rationem EF ad FD, vt HK eſt ad KG.



QVoniam ratio BC ad BA eſt ad rationem EF ad ED, vt HK eſt ad HG, igitur rationis BC ad BA denominator eſt HK reſpectu HG denominatoris rationis EF ad ED. eſt autem per 39 de proport. vt ratio BC ad BA ad rationem EF ad ED, ita ratio BC ad EF ad rationem BA ad ED, erit igitur ratio HK ad HG, ratio denominatorum rationum BC ad EF, & BA ad ED. ergo ratio antecedentium BC ad EF ad rationem differentiarum CA ad FD, eadem erit cum ratione antecedentis HK ad differentiam KG. ſed vt ratio BC ad EF eſt ad rationem CA ad FD, ita ratio BC ad CA eſt ad rationem EF ad FD per 39 de proport. igitur vt HK ad KG ita ratio BC ad CA ad rationem EF ad FD. quod erat demonſtrandum.

Lemma V.



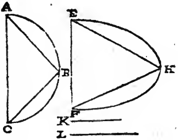
DAtus ſit ſector ABC ſuo circulo commenſurabilis.

Oporteat illi ſemicirculum exhibere æqualem.

QVoniam ſector ABC commenſurabilis ponitur ſuo circulo, igitur pars eſt aliquota ſui circuli; eſto ſextans, igitur & tertia pars erit medij circuli. fiat igitur vt tria ad vnum, ita quadratum AB, ad quadratum GD, & ſuper GD vt ſemidiametro deſcribatur ſemicirculus DEF, dico,

dico illum æquari ſectori A B C ; eſt enim ſemicirculus ſuper A B vt ſemidiametro ad ſemicirculum D E F, vt quadratum A B ad quadratum D G, hoc eſt vt tria ad vnum, ſed ex hypotheſi ſemicirculus ſuper A B ſemidiametro, eſt ad ſectorem A B C, vt tria ad vnum, ſector igitur A B C æquatur ſemicirculo D E F. igitur &c. quod erat faciendum.

Lemma VI.



Dato ſemicirculo & recta quauis E F, oportet ſuper E F vt axe, ſemiellipſim deſcribere, ad quam ſemicirculus A B C datam habeat rationem K ad L.

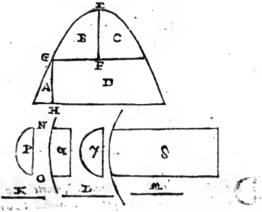
Conſtr. & Demonſtr.

INſcribatur ſemicirculo triangulum iſoſceles A B C, & ſuper E F vt baſi, iſoſceles deſcribatur, ad quod A B C triangulum, datam habeat rationem K ad L, tum per puncta E H F ſemiellipſis deſcribatur cuius axis ſit E F. dico illam eſſe quæ petitur. eſt enim ſemicirculus A B C ad ſemiellipſim E H F, vt A B C triangulum ad triangulum E H F per 191. de ellipſi. ſed triangula illa ſunt vt K ad L, igitur & circulus eſt ad ellipſim vt K ad L. fecimus igitur &c.

PARS TERTIA

Exhibetur circuli quadratura.

PROPOSITIO VIII.



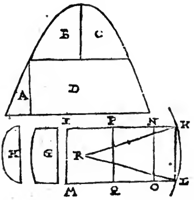
SIt E F axis parabolæ, & diameter GH, æqualis EF, iuxta determinationem factam in ſcholio lem.2. ductiſque per F & H normalibus, exhibeantur plana parabolica A,B,C,D.

Oportet tria ſolida cylindrica, orta ex ductu ſubalterno planorum A,B,D, reducere ad eandem altitudinem.

PEr 6. huius, illiuſque coroll. ſegmentum δ, in altitudinem M, æquale ſit D, in ſe ſubalternè. & ſemicirculus γ, in altitudinem L, ſit æqualis B in ſe ſubalternè; denique & ſegmentum α, in altitudinem K, ſit æquale A in ſe ſubalternè: quoniam A & D in ſe ſubalternè, ſunt partes eiuſdē ſegmenti in determinatam ducti altitudinem per coroll. propoſ. 6. erunt M & K altitudines æquales. fiat igitur vt M ad L, ita ſemicirculus γ, ad ſemiellipſim P, cuius axis N O, æquetur diametro ſemicirculi γ: patet ex elementis P in altitudinem M, æquari γ in altitudinem L. factum igitur eſt quod petebatur.

PRO-

PROPOSITIO IX.



EXponatur eadem parabola quæ prius,& ſegmẽta tria G,H, IKLM, quæ ducta in eandem altitudinem, per præcedentem,facta ſunt æqualia tribus ſolidis ex ductu ſubalterno planorum A,B,D, in ſe ipſa. ſegmento autem G, æquale ponatur NKOL, ſectori vero RKL æquale fiat ſegmentum PKLQ.

Dico notam eſſe proportionem rationis,ſegmenti NKLO, ad ſegmentum PKLQ, ad rationem ſegmenti PKLQ, ad ſegmentum IKLM.

QVoniam ex hypotheſi facta in ſcholio ad lem. 2. partis 2. huius,arcus KL commenſurabilis eſt peripheriæ ſui circuli, erit ſector RKL commenſurabilis ſuo circulo, adeoque nota ratio ſectoris RKL ad ſemicirculum, cuius pars eſt; hoc eſt nota ratio ſegmenti PKLQ ad ſuũ ſemicirculum. ſed nota eſt ratio ſemicirculi, cuius pars eſt ſegmentum PKLQ ad ſemiellipſim H, igitur nota eſt ratio ſegmenti PKLQ ad ſemiellipſim H. igitur etiam nota eſt ratio ſegmenti PKLQ ducti in ſe,ad ſemiellipſim H ductam in ſe: ſed vt PKLQ ductum in ſe, ad H ductum in ſe, ita proportio rationis G ad H, ad rationem H ad IKLM, ad proportionem rationis NKLO ad PKLQ, ad rationem PKLQ ad IKLM, per lemma 3 partis præced. igitur nota eſt ratio proportionis G, ad H, ad rationem H ad IKLM, ad proportionem rationis NKLO ad PKLQ, ad rationem PKLQ ad IKLM. ſed nota eſt proportio rationis G ad H ad rationem H ad IKLM (nam eadem eſt cum proportione ſolidorum, A,B,D in ſe ordinatè per 3 huius, quæ nota eſt per

 4 huius

4 huius,eiuſque coroll.)igitur & nota eſt proportio rationis NKLO ad PKLQ ad rationem PKLQ ad IKLM.

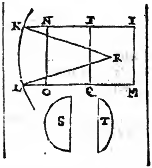
PROPOSITIO X.

Iiſdem poſitis:dico notam eſſe proportionem rationis ſegmenti NKLO ad rectilineum PNOQ, ad rationem ſegmẽti PKLQ ad rectilineum IPQM.

R T S

Per præcedentem, nota eſt proportio rationis, ſegmenti NKLO ad ſegmentum PKLQ, ad rationem ſegmenti PKLQ ad ſegmentum IKLM: ſit igitur ratio NKLO ad PKLQ, ad rationem PKLQ ad IKLM, vt ST, ad SR: nota igitur eſt ratio ST ad SR, igitur & nota eſt ratio ST ad TR: ſed vt ST ad TR ita ratio ſegmenti NKLO ad reſiduum PNOQ ad rationem ſegmenti PKLQ ad reſiduũ IPQM per lemma 4. igitur proportio illarum rationum nota eſt.

PROPOSITIO XI.



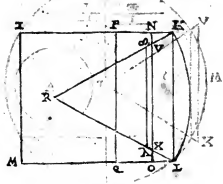
Exponantur ſegmenta IKLM, PKLQ, NKLO de quibus in præcedenti propoſ. dictum eſt: dico notam eſſe rationem ſegmenti NKLO ad reſiduum rectilineum PNOQ.

Fiat per lem. 5. part. 2. huius ſectori RKL, æqualis ſemicirculus S. per præcedentem, nota eſt proportio rationis ſegmenti NKLO ad PNOQ, ad rationem ſegmenti PKLQ ad IPQM: ſed proportio rationis ſegmenti NKLO, ad PNOQ, ad rationẽ ſegmenti PKLQ, ad IPMQ, eadem eſt cũ proportione rationis ſegmenti NKLO, ad ſegmentum PKLQ, ad rationem rectilinei PNOQ ad rectilineum IPQM per 39. de proport. igitur & hæc proportio nota eſt. fiat igitur vt IPQM ad PNOQ, ita ſegmentum PKLQ (hoc eſt per conſtructionem præcedentis, ſector RKL, hoc eſt per conſtructionẽ huius, ſemicirculus S)

ad

ad ſemiellipſim T, per lem. 6. erit igitur per 13. de proport. ratio ſegmẽti N K L O ad ſegmentum P K L Q, ad rationem PNOQ ad IPQM, vt ſegmentum N K L O ad ſemiellipſim T: ſed nota eſt proportio rationis N K L O ad P N O Q ad rationem P K L Q ad I P Q M per 10 huius: igitur nota eſt ratio ſegmenti N K L O, ad ſemiellipſim T. ſed per. 191 de ellipſi, nota eſt ratio ſemiellipſis T, ad ſemicirculum S: igitur & nota eſt ratio ſegmenti N K L O, ad ſemicirculum S, hoc eſt ad ſectorem R K L, hoc eſt ad ſegmentum P K L Q. igitur & nota eſt ratio ſegmenti N K L O, ad reſiduum rectilineum P N O Q: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.



EXponantur iterum ſegmenta, I K L M, P K L Q, N K L O, cum ſectore R K L: Iunganturque KL.

Dico notam eſſe rationem ſectoris R K L ad reliquum ſectoris triangulum K R L:

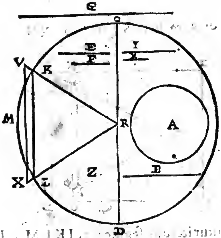
DVcatur recta δλ, paralela N O, vt rectilineum δ V λ X, ſit æquale duobus triangulis N V K, O X L: erit igitur ſegmentum N K L O, æquale ſegmento δ K L λ: ſed per præcedentem, nota eſt ratio ſegmenti N K L O, ad reſiduum P N O Q, igitur & nota eſt ratio, ſegmenti δ K L λ, ad rectilineum P N O Q: quia vero ſegmentum P K L Q, æquale poſitum eſt ſectori R K L, & rectilineum δ V X λ, æquale duobus triangulis N V K, O X L, erit triangulum δ R λ, æquale rectilineo P N O Q: igitur nota eſt ratio ſegmenti δ K L λ, ad reſiduum triangulum δ R λ: ergo & nota eſt ratio, ſegmenti δ K L λ, vna cum triangulo δ R λ, hoc eſt ratio ſectoris R K L, ad triangulum R δ λ: ſed nota eſt ratio trianguli δ R λ, ad triangulum R K L, igitur & nota eſt ratio, ſectoris R K L, ad triangulum R K L. quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Dato Circulo æquale exhibere quadratum.

Conſtr. & Demonſtr.

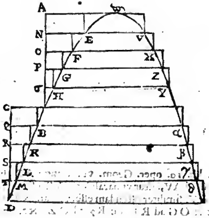


Datus eſto Circulus A cui quadratum oporteat exhibere æquale: exponatur ſector K L R, cuius ratio ad reſiduum ſectoris triangulum, per præcedentẽ, nota eſt. compleaturque circulus CMD. ſit autem ratio ſectoris K M L R ad K L R triangulum, ratio E ad F. ſi fiat vt F ad E ita triangulum K L R ad triangulum V R X, erit hoc æquale ſectori K M L R. quia vero nota eſt ratio ſectoris K M L R ad ſuum circulum, ex ſcholio lemm. 2, partis 2 huius, ſit illa ratio F ad G: igitur ſi fiat vt F ad G, ita triangulum V R X ad aliud triangulum Z, erit hoc æquale circulo C M D. nota autem eſt ratio circuli C M D ad circulum A, ſit illa ratio I ad K; ſi fiat vt I ad K ita triangulum Z ad quadratum B, erit hoc æquale circulo A &c. ſolutum igitur eſt problema Auſtriacum.

FINIS LIBRI TERTII.

TERTIA CIRCVLI QVADRATVRA

PROPOSITIO I.

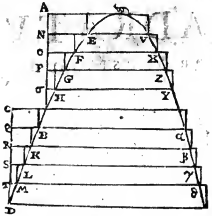


SInt AB,CD diametri duæ æquales,exterius applicatæ parabolæ EBD: quibus in æquales & æque multas partes diuiſis,agantur per diuiſionum puncta,normales, & compleantur rectangula AE, A V &c.

Dico paralelopipedum ex ductu AE in ſe,ad CB in ſe,eſſe vt Cα in ſe,ad AV in ſe:item NF in ſe,eſſe ad QK in ſe,vt Qβ in ſe, ad NX in ſe;& OG in ſe,ad RL,in ſe,ſicut Rγ in ſe ad OZ in ſe; &c.

Demonſtr.

QVoniam altitudines paralelopipedorum ex A E in ſe & C B in ſe, C α in ſe, A V in ſe,æquales ſunt, eam inter ſe habebunt rationem, quæ inter baſes illorum eſt;nimirum rectangu la A E, C B, C α, A V:



ſed per 8o. lib. 10. oper. Geom. vt rectang. AE eſt ad CB, ita rectang. Cα eſt ad AV, igitur vt paralelop. AE eſt ad CB. ita paral. Cα eſt ad par. AV. ſimiliter oſtendam eſſe, vt par. NF ad QK, ſic Qβ ad NX, & vt OG ad RL, ſic Rγ ad OZ: &c. quod erat demonſtrandum.

Hinc proportio rationis paralelop AE ad CB, ad rationem Cα ad AV, eadem eſt cum proportione rationis par. NF ad KQ, ad rationem Qβ ad NX; & permutando, proportio rationis AE ad CB, ad rationem NF ad QK, eadem eſt cum proportione rationis Cα ad AV, ad rationem Qβ ad NX & ſic deinceps.

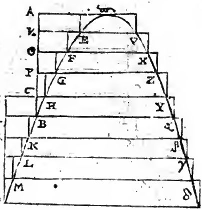
PROPOSITIO II.

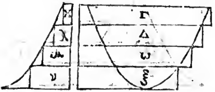
Eadem figurâ manente: ponantur figuræ A$\varpi\sigma$H, CHTM, CAϖY: CYTδ ſubalternè cum ſuis rectangulis.

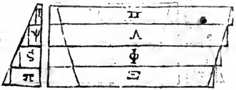
Dico rationem paralelop. ex AE in X, ad CB in Φ, eandem eſſe cum ratione Cα in Π, ad AV in Γ: & rationem NF in λ, ad QK in ψ, eandem eſſe cum ratione Qβ in Λ, ad NX in Δ: & ſic deinceps.

Demon-

Demonſtratio.



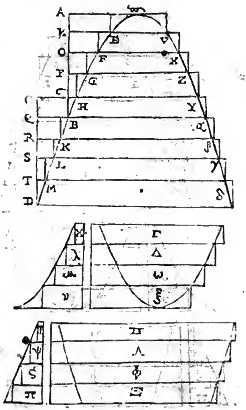




Ratio corporis ex AE in κ, ad CB in φ, componitur ex ratione rectanguli AE ad CB, & rectang: κ ad φ: item ratio corporis ex Cω in π. ad AV in Γ, componitur ex ratione rectanguli Cω ad AV, (hoc eſt ex ratione AE ad CB) & ex ratione rectanguli π ad Γ, (hoc eſt rectanguli κ ad φ) ratio igitur corporis ex AE in κ, ad CB in φ, ex iiſdem componitur ex quibus compoſita eſt ratio corporis ex Cω in π, ad AV in Γ, igitur vt AE in κ, ad CB in φ; ita Cω in π, ad AV in Γ: ſimiliter oſtendetur eſſe vt NF in λ, ad QK in ψ; ita Qβ in μ ad NX in Δ & ſic de cæteris quod erat demonſtrandum.

Hinc proportio rationis AE in κ, ad CB in φ, ad rationem Cω in π ad AV in Γ, eadem eſt cum proportione AE ad CB ad rationem Cω ad AV, & permutando &c.

PROPOSITIO III.



EAdem manente figurâ.

Dico rationem ſolidi ex ductu mixtilinei AσHϖ in ſe ordinate ad ſolidum ex ductu CHTM in ſe ordinare eſſe ad rationem ſolidi ex ductu mixtilinei CTδY in ſe ordinate ad ſolidum ex AσYϖ in ſe ordinate, ſicut ratio ſolidi ex AσHϖ in ſe ſubalterne ad ſol. ex CHTM in ſe ſubalterne eſt ad rationem ſolidi ex CTδY in ſe ſubalterne ad ſol. ex AσYϖ in ſe ſubalterne.

Demonſtratio omnino eadem eſt cum illa quæ propoſ. 3.

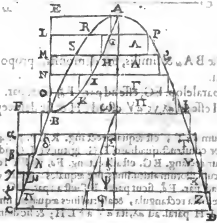
Quadratura ſecunda adhibita eſt.

Ad

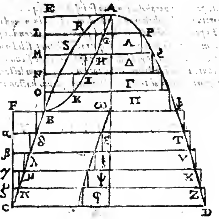
Ad Lectorem.

HVcuſque per duas corporum proportiones progreſſi ſumus, quarum ſinguiæ, quatuor habent terminos diuerſos: & prima quidem, quatuor conſtat ſolidis ex ductu ordinato partium parabolicarum in ſe ipſas, altera quatuor ſolidis ex ductu earundem partium in ſe ſubalternè natis: demonſtrandum modo eſt, quâ methodo, ex prædictis proportionibus, circulus ad quadrum reducendus ſit: atque id plurimis quidem modis fieri poteſt, ſed quia reductiones ſolidorum quatuor ex ductu ſubalterno, moroſæ ſunt ac perdifficiles, eaque inter ſe ſecundum baſes comparare, plenum opus ſit tadij & laboris, rem totam, in gratiam lectoris, ad tres terminos reducam, quorum prior ac tertius, iidem ſunt, quibus hactenus vſi, medius vero diuerſus.

PROPOSITIO IV.



SInt EB, FC æquales diametri, exterius applicatæ parabolæ ABC; quibus in partes æque multas, & æquales diuiſis, ducantur per diuiſionum puncta normales, compleanturque rectangula vt prius: ſint autem inter LR, LP, & inter MS, MQ mediæ proportionales LG, MH; & per BHG deſcribatur parabola, cuius axis ſit EB, & B vertex; tranſibit illa per A, & erit æqualis para-



lis parabolæ B A ω & ſimilis, per demonſtr. propoſ.103.lib.10. oper.Geom.

Dico 1. paralelop. EG, eſſe ad par. F δ, ſicut par. F T, eſt ad EG. & LH eſſe ad αλ, vt αV eſt ad LH & ſic deinceps.

REctangulum δαT, eſt æquale rectang. R L P, per 45. de parab. hoc eſt per conſtruct. quadrato L G, igitur vt L G ad αδ, ita αT ad L G; igitur rectang. E G, eſt ad rectang. F δ, vt F T rectang. ad rectang. E G, cum illorum altitudines ſint æquales: igitur etiam paralelop. E G eſt ad par. F δ, ſicut paral. F T eſt ad par. E G, nam horum baſes ſunt prædicta rectangula, & altitudines æquales. ſimiliter oſtendam eſſe, vt L H paral. ad αλ, ita αV ad L H; & ſic deinceps.

SInt iam rectang. Σ, ξ, ψ, φ, eadem quæ F δ, αλ, βμ, γπ: ſed ſubalternè poſita:

Dico 2. rationem paralelop. ex EG in Λ, ad F δ in Σ, æqualem eſſe rationi paral. ex F T in ζ D, ad E G in Λ: item LH in Δ, eſſe ad αλ in ξ, vt αV in ζ Z, ad LH in Δ: & ſic de omnibus ſubalternis.

Demon-

Demonſtratio eadem eſt cum ſecunda huius.

DIco 3. rationem ſolidi ex ductu EOKA in ſe ordinate ad ſolidum ex FB$\zeta\pi$ in ſe ordinate, eſſe ad rationem ſolidi ex F$\varphi\zeta$Z in ſe ordinate ad ſolidum ex EOKA in ſe ordinate, ſicut ratio ſolidi ex EOKA in ſe ſubalterne ad FB$\zeta\pi$ in ſe ſubalterne, eſt ad rationem F$\varphi\zeta$Z in ſe ſubalterne ad EOKA in ſe ſubalterne.

Demonſtratio eadem eſt cum tertia quadraturæ ſecundæ.

Lemma.

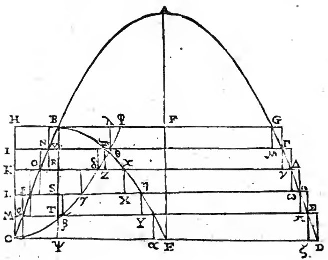
A C
B
D E

SI fuerit ratio AB ad rationem BC, vt ratio DB ad rationem BE; dico eſſe vt A ad D, ita E ad C. erit enim permutando, vt ratio AB ad rationem DB, ita ratio BC ad rationem BE; ſed AB ratio eſt ad rationem DB vt A ad D per 2. de proport. & ratio BC eſt ad rationem BE, vt E ad C, per 7. eiuſdem, igitur vt A ad D, ita E ad C.

Conuerſa Lemmatis.

SI fuerit vt A ad D ita E ad C, & quæuis interponatur B, dico rationem AB eſſe ad rationem BC, vt DB ratio eſt ad rationem BE. eſt enim AB ratio ad rationem DB vt A ad D; & BC ratio ad rationem BE vt E ad C. cum igitur ſit vt A ad B ita E ad C, erit AB ratio ad rationem DB, vt BC ratio ad rationem BE, & permutando, vt ratio AB ad rationem BC, ita ratio DB ad rationem BE.

PROPOSITIO V.



HN	HΓ	QΨ	Tζ
IO [in] Iν		PT [in] Sπ	
KP	KΛ	OS	Rω
LQ	LΣ	NR	Vν

Diuiſo AE axe parabolæ bifariam in F, ducantur per F & E normales BG, CD; quas in H & Ψ, ſecent diametri CH, BΨ.

Dico rationem plani. CHB ducti in ſe ordinatè, ad BAF, in ſe ordinatè, eſſe ad rationem BAF in ſe ordinatè, ad CHGD in ſe ordinatè, ſicut ratio CBΨ in ſe ordinatè, ad BAF in ſe ordinatè, eſt ad rationem B AF in ſe ordinatè ad ΨBGD in ſe ordinatè.

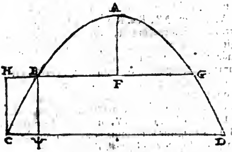
Demonſtratio.

Fiant continuè proportionales H B, Hφ, H G; & per C & φ deſcribatur parabola, cuius axis ſit CH, & vertex C; erit illa æqualis parabolæ BAF, per propoſ. 103. lib. 10. operis Geom. dein per B & E deſcribatur parabola Ψ BE, cuius axis ſit BΨ, vertex autem B. erit illa æqualis parabolæ HCφ, adeoque ipſi BAF, per eandem; tum HC lineâ diuisâ in partes quotcunque æquales, agantur per diuiſionum puncta normales, compleanturque rectangula, HN, Vλ, Bμ, HΓ &c. quoniam rectæ HB, Hφ, HG, ſunt continuè proportionales erunt IN, Iθ, IΓ, item KO, Kδ, KΔ continuè proportionales, & ſic de cæteris per 167. de parab. igitur & rectangula HN, Hθ, HΓ, ſunt in continua analogia;

logia; item rectangula IO, Iδ, IΔ; item KP, Kγ, KΛ &c. igitur etiam paralelopipeda, orta ex ducta eorundem rectangulorum in ſeipſa ſunt in continua ratione, cum illorum altitudines ſint vtrobique æquales: rurſum per 275. de parabola, ſunt in continua proportione rectæ NV, Vϖ, VΓ; item OR, Rκ, RΔ, & ſic de reliquis: igitur & continuè proportionalia ſunt rectangula, NR, VZ, Vν; item OS, RX, Rω, &c. igitur etiam paralelopipeda, quorum baſes ſunt illa rectangula, ducta in eandem altitudinem IK, vel KL &c.

Sumantur iam rectangula duo, æqualiter à verticibus ſuarum parabolarum, quibus ſunt inſcripta, diſtantia, Iδ, & SY; erunt illa inter ſe æqualia, adeoque & paralelopipeda, ex ductu illorum in ſe ipſa nata, æqualia ſunt. eſt autem paral. Iδ, medium proportionale inter paralelop. IO & IΔ; paralelop. vero SY, medium eſt proportionale, inter paralelop. PT, Sπ; igitur per lemma præcedens, vt paral. IO eſt ad paral. PT, ita paralelop. Sπ, ad paral. IΔ: ſimiliter erit vt paralelop. KP ad paral. OS, ſic paral. Rω ad par. KΛ. item vt paralelop. HN, ad paral. Qψ, ite paral. Tζ ad par. HΓ. cum parabel. Hθ, æquale ſit paral. Tα &c. igitur par. HN ductum in par. HΓ, æquatur par. Qψ ducto in par. Tζ. & paral. IO ductum in par. IΓ, æquatur par. Qψ ducto in par. Tζ. & par. IO ductum in paral. ιν, æquatur par. PT in par. Sπ. & par. KP, in par. KΛ, æquatur par. OS in par. Rω &c. igitur vt HN in HΓ, eſt ad Qψ in Tζ, ita IO in Iν, ad PT in Sπ: & vt IO in Iν, ad PT in Sπ, ita KP in KΛ, ad OS in Rω, igitur per 12.5. Euclidis, aggregatum ex HN in HΓ, IO in Iν, KP in KΛ LQ in LΣ eſt ad aggregatum ex Qψ in Tζ, PT in Sπ, OS in Rω NR in Vν vt primum HN in HΓ ad Qψ in Tζ: ſed horum ratio eſt æqualitatis, igitur & ratio aggregatorum, æqualitatis eſt: quod cum ſemper fiat in omni ſubdiuiſione & inſcriptione in infinitum, patet aggregatum ex infinitis paralelop. inſcriptis ſolido ex CHB in ſe, ductis in infinita paralelop. inſcripta ſolido ex CHGD in ſe, æquari aggregato ex infinitis paralelopipedis inſcriptis ſolido ex CBψ in ſe, ductis in infinita paralelop. inſcripta ſolido ex ductu ψBGD in ſe: igitur ſolidum ex CHB in ſe, ductum in ſolidum ex CHGD in ſe, æquatur ſolido ex CBψ in ſe, ducto in ſolidum ex ψBGD in ſe. igitur per 85. de proport. ſolidum ex CHB in ſe, eſt ad ſolidum ex CBψ in ſe, vt ſolidum ex ψBGD in ſe, ad ſolidum ex CHGD in ſe. igitur per conuerſam lemmatis præcedentis, ratio ſolidi ex CHB in ſe, ad ſolidum ex BAF in ſe, eſt ad rationem ſolidi ex BAF in ſe, ad ſolidum ex CHGD in ſe, vt ratio ſolidi ex CBψ in ſe, ad BBF in ſe, eſt ad rationem ſolidi ex BAF in ſe, ad ſolidum ex ψBCD in ſe. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.



Iſdem poſitis.

Dico rationem CHB in ſe ſubalternè, ad BAF in ſe ſubalternè, eſſe ad rationem B A F in ſe ſubalternè, ad C H G D in ſe ſubalternè, vt ratio CBΨ in ſe ſubalternè, ad BAF in ſe ſubalternè, eſt ad rationem BAF in ſe ſubalternè, ad ΨBGD in ſe ſubalternè.

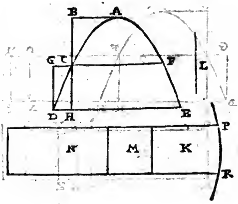
Demonſtratio.

VT ratio C H B in ſe ordinatè, ad B A F in ſe ordinatè, eſt ad rationē BAF in ſe ordinatè, ad CHGD in ſe ordinatè, ita ratio CHB in ſe ſubalternè, ad BAF in ſe ſubalternè eſt ad rationē BAF in ſe ſubalternè ad CHGD in ſe ſubalternè, per aſſert. 3. prop. 4. huius. eſt autē per 3. lib 3. huius, vt ratio CBΨ in ſe ordinatè, ad BAF in ſe ordinatè, ad rationē BAF in ſe ordinatè, ad ΨPGD in ſe ordinatè, ita ratio CBΨ in ſe ſubalternè, ad B A F in ſe ſubalternè, ad rationem B A F in ſe ſubalternè, ad Ψ B G D in ſe ſubalternè: igitur vt proportio rationis C H B in ſe ordinatè, ad B A F in ſe ordinatè, ad rationem B A F in ſe ordinatè, ad C H G D in ſe ordinatè, eſt ad proportionem rationis C B Ψ in ſe ordinatè, ad B A F in ſe ordinatè, ad rationem B A F in ſe ordinatè, ad Ψ B G D in ſe ordinatè, ita proportio rationis C H B in ſe ſubalternè, ad B A F in ſe ſubalternè, ad rationem B A F in ſe ſubalternè, ad C H G D in ſe ſubalternè, eſt ad proportionem rationis C B Ψ in ſe ſubalternè, ad B A F in ſe ſubalternè, ad rationem B A F in ſe ſubalternè, ad Ψ B G D in ſe ſubalternè: ſed per præcedentem, duæ proportiones rationum, quæ exiſtunt inter ſolida ex ductu ordinato orta, ſunt inter ſe æquales, igitur & duæ reliquæ proportiones rationum, inter ſolida ex ſubalterno ductu nata, æquales ſunt. quod erat demonſtrandum.

Hinc ſequitur, per lemma præcedentis propoſitionis, C H B in ſe ſubalternè, eſſe ad C B Ψ in ſe ſubalternè ſicut Ψ B G D *in ſe ſubalternè, eſt ad CHGD in ſe ſubalternè:*

PRO-

PROPOSITIO VII.



SInt BC, GD diametri æquales, exterius applicatæ parabolæ ADE, ducanturque normales GCF, DE, & BA contingens, paralela GF.

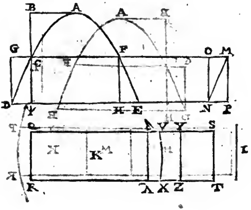
Oporteat ſolidum ex DGFE in ſe ſubalternè dare corpus æquale determinatam habens baſim & altitudinem notam.

Conſtr. & Demonſtr.

DIameter BC producta occurrat DE lineæ in H. Per 199. de ductibus, planum DGFE in ſe ſubalternè æquatur plano HCFE in ſe ſubalternè, vna cum plano DGCH in ſe, & plano HCFE bis in planum GCDH. plano autem HCFE in ſe ſubalternè, per 6. l. 3. huius, æquatur ſegmentum circulare K, ductum in determinatam altitudinem L. apponatur ſegmento K rectangulum M, quod ductum in altitudinem L, ſit æquale rectangulo GCDH ducto in ſe. item cum quadrata ſit parabola HCFE, ſi rectangulum illi æquale, intelligatur duci in duplam altitudinem GC, erit hoc ſolidum æquale parabolæ HCFE bis ductæ in rectangulum GCDH: fiat igitur rectangulum N, quod ductum in altitudinem L, ſit æquale ſolido ex HCFE bis ducto in rectang. GCDH, quod fieri ex elementis poteſt, cum ſolidum illud ſit paralelopipedum notam habens baſim & altitudinem. totum igitur planum NMK ductum in altitudinem L, eſt æquale plano DGFE ducto in ſe ſubalternè.

Hinc patet ſolidum ex HCFE in ſe ſubalternè & ſolidum ex DGFE in ſe ſubalternè, reducta eſſe ad partes cylindricas eandem habentes altitudinem L, & baſes quas idem arcus circularis PR. ſubtendit ſeu terminat.

PROPOSITIO VIII.



EAdem poſitâ figurâ, oporteat ſolido ex DGC in ſe ſubalternè, æquale exhibere corpus, notam habens altitudinem & baſim determinatam.

Conſtructio & Demonſtratio.

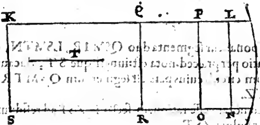
PRoducatur CF in M, & DE in N, vt pars HFMN ſit æqualis, & ſubalternè poſita ipſi HFCD, ducanturque NO, MP paralelæ FH. & ſegmentum circulare K ductum in altitudinem L, ſit æquale DGFH in ſe ſubalternè, hoc eſt DCFH in FHMN. & quoniam pars parabolica HFMN quadrata eſt; rectangulum DGFH ductum in HFMN, producit notum paralelopipedum, cui fiat æquale rectangulum RQST in altitudinem L: patet ST rectam cadere extra ſegmentum circulare K, cum DGFH in FHMN, maius ſit quam DCFH in FHMN, adeoque & QRST in L, maius ſegmento K, ſiue QRVX in L, cum igitur DCFH in FHMN, ſit QRVX in L, & DGFH in FHMN, ſit QRST in L, erit DGC in HFMN, æquale concauo VSTX in L. rurſum quoniam quadrata eſt pars parabolica DGC, hæc ducta in rectangulum FHON, notum producit paralelopipedū, cui fiat æquale rectangulum STYZ in altitudinem L, patet recta YZ cadere extra ſegmentum circulare: quia cum DGC in FHMN, maius ſit quam DGC in FHON; ipſi vero DGC in FHMN ſit æquale VSTX in L, & ipſi DGC in FHON æquale ſit SYTZ in L, erit SYTZ minus SVTX: cum igitur DGC in HFMN ſit æquale VSTX in L; & DGC in HFON, ſit æquale SYTZ in L, patet reſiduum VYZX in L, æquari DGC in ONM. iterum cum DGC parabola ſit quadrata, hæc ducta in rectangulum OMPN notum

notum producit paralelopipedum, cui fiat æquale rectangulum Y Z δ λ in altitudinem L: patet δ λ cadere intra ſegmentum circulare: nam cum D G C in O M P N, maius ſit quam D G C in O M N, ſit autem D G C in O M N æquale V Y Z X in L, & ipſi D G C in O M N P æquale ſit δ Y Z λ in L, patet δ Y Z λ, maius eſſe V Y Z X, adeoque δ λ cadere intra ſegmentum. igitur ſi ab D G C in O M P N, hoc eſt ab δ Y Z λ in L, auferatur D G C in O N M, hoc eſt V Y Z X in L; erit ſegmentum reliquum δ V X λ in L, æquale reliquo D G C in N M P, hoc eſt D G C in ſe ſubalternè; igitur &c. quod erat faciendum.

Coroll.

HInc patet partem D G C in ſe ſubalternè, reductam eſſe ad ſolidum cylindricum eandem habens altitudinem, cum parte D C F H in ſe ſubalternè, & ad cylindricum reducta; & baſim quæ pars ſit ſegmenti K quod baſis eſt partis D C F H reductæ.

PROPOSITIO IX.



ESto ſegmentum K S N M L K ductum in altitudinem T, æquale ſolido ex ductu D G F E (vid. fig. præc.) in ſe ſubalternè per 7. huius. & ſegmentum Q L M N R in altitudinem T æquale ♆ C F E in ſe ſubalternè. ſegmentum vero L M N in altitudinem T, æquale D G C in ſe ſubalternè.

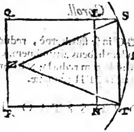
Dico notam eſſe rationem ſegmenti L M N ad ſegmentum Q L M N R.

Demonſtratio.

QVoniam planum D C ♆ (vid. fig. præc.) in ſe ſubalternè, reductum eſt ad ſolidum cylindricum, cuius altitudo eſt T, & baſis eſt pars ſegmenti Q L M N R per propoſ. 6. lib. 3. eiuſque coroll. eſto P M O ſegmentum illud. igitur per 6. huius, eiuſque corollar. erit vt L M N ſegmen-

gmentum ad ſegmentum P M O, ita ſegmentum Q M R ad ſegmentum K L M N S. & diuidendo vt L M N ſegmentum ad rectangulum P L O N, ita ſegmentum Q M R ad rectangulum K Q R S. igitur permutando erit L M N ſegmentum ad ſegmentum Q M R vt rectangulum P L N O ad rectang. K Q R S. ſed horum ratio nota eſt, igitur & illorum: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.



EXponantur ſegmenta duo QSMTR, LSMTN, quorum ratio per præced. nota eſt: iunctiſque S T, ducantur ad Z centrum circuli cuius pars eſt ſegmentum Q S M T R, rectæ SZ, TZ.

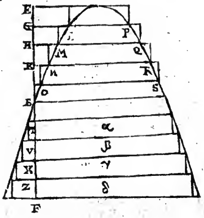
Dico notam eſſe rationem ſectoris ZST ad reſiduum ſectoris triangulum ZST.

Demonſtratio.

PEr præced. nota eſt ratio ſegmenti LSMTN ad ſegmentũ QSMTR; igitur & nota eſt ratio ſegmenti L SMT N ad reſiduum rectangulum L Q R N: ſed nota eſt ratio rectanguli LSNT ad rectang. LQRN, nota igitur eſt ratio ſegmenti L S M T N ad rectang. L S N T igitur etiam nota eſt ratio ſegmenti L S M T N ad ſegmentum S M T, & ratio ſegmenti S M T ad rectangulum L S N T. ſed nota eſt ratio rectanguli L S N T ad triangulum Z S T, igitur nota eſt ratio ſegmenti SMT ad triangulum Z S T. igitur nota eſt ratio ſectoris Z S M T ad triangulum Z S T; quod erat demonſtrandum.

QVARTA CIRCVLI QVADRATVRA.

PROPOSITIO I.

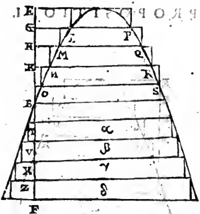


ESto EF diameter quæcunque, ſecans parabolam in B, factiſque EB, BF æqualibus, diuidantur EB, BF in partes æque multas & æquales, ac ductis per diuiſionum puncta normalibus, compleantur rectangula:

Dico paralelopip. KO eſſe ad paral. T, vt par. α eſt ad paral. KS. item HN eſſe ad V, vt β eſt ad HR; & GM eſſe ad X, vt γ eſt ad GQ, denique & EL eſſe ad Z, vt δ eſt ad EP.

Demon-

Demonſtr.



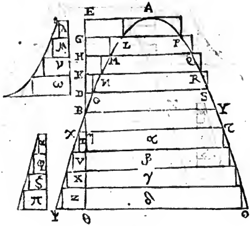
PEr propoſ. 104. lib. 10. oper. Geom. rectang. K O eſt ad rectang T, vt rectang. α eſt ad rectang. K S. ſed paralelop. K O eſt ad paral T, vt rectang K O ad rectang. T, cum hæc, illorum ſint baſes, altitudines autem vtrobique ſint æquales; & paral. α eſt ad paral. K S vt rectang. α ad rectang. K S; igitur paral. K O eſt ad paral. T, vt paral. α eſt ad paral. K S. ſimiliter oſtenditur eſſe paral. H N ad paral. V, vt paral. β eſt ad paral. H R, & ſic deinceps; quod erat demonſtrandum.

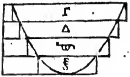
Corollarium.

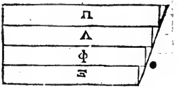
HInc proportio rationis paral. K O ad T, ad rationem α ad K S, eadem eſt, cum proportione rationis H N ad V, ad rationem β ad H R; & permutando; proportio rationis K O ad T, ad rationem H N ad V, eadem eſt cum proportione rationis α ad K S, ad rationem β ad H R. & ſic deinceps.

PRO-

PROPOSITIO II.

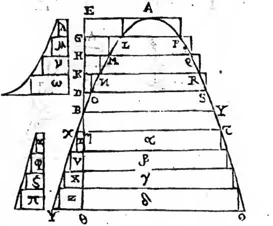


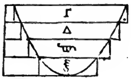


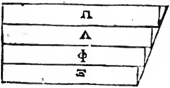


EAdem figurâ poſita, ponantur ſubalternè partes parabolicæ BEA,BEAY, χψθ, θτο cum rectangulis ſuis inſcriptis.

 Dico







Dico planum K O ductum in ω, ad planum T ductum in κ, eandem habere rationem, quam habet planum α ductum in π, ad planum K S ductum in ξ. item H N in ν, eſſe ad V in φ, vt β in λ, ad H R in ϖ, & ſic de cęteris.

Demon-

Demonſtr.

RAtio plani K O in ω, ad planum T in κ, componitur ex ratione rectang. K O ad rectang. T, & ex ratione rectanguli ω ad rectang. κ, hoc eſt E L ad Z: ſimiliter ratio α in π, ad K S in ξ, componitur ex ratione rectang. α ad rectang. K S, & ex ratione rectang. π ad rectang. ξ, hoc eſt δ ad E P: ſed ratio rectang. K O ad T, eadem eſt cum ratione α ad K S, & ratio rectang. E L ad Z, eadem eſt cum ratione rectang. δ ad E P, igitur ratio K O in ω ad T in κ, componitur ex iiſdem rationibus, ex quibus componitur ratio α in π ad K S in ξ. igitur K O in ω, eſt ad T in κ, vt α in π ad K S in ξ: ſimiliter oſtendetur eſſe H N in ν, ad V in φ, vt β in λ, ad H R in ϖ: & ſic deinceps. quod erat demonſtrandum.

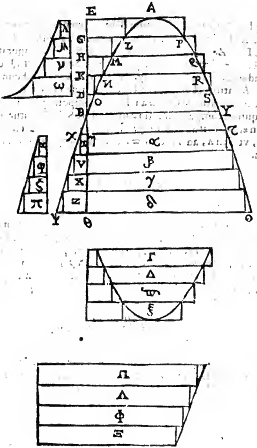
Coroll. I.

HInc proportio rationis K O in ω, ad T in κ, ad rationem α in π ad K S in ξ, eadem eſt cum proportione rationis H N in ν ad V in φ, ad rationem β in λ ad H R in ϖ: & permutando, proportio rationis K O in ω ad T in κ, ad rationem H N in ν ad V in φ, eadem eſt cum proportione rationis α in π ad K S in ξ, ad rationem β in λ ad H R in ϖ. & ſic deinceps.

Coroll. II.

SEquitur ſecundo, proportionem rationis Ko ad T ad rationem α ad K S, eandem eſſe cum proportione rationis K O in ω ad T in κ, ad rationem α in π ad K S in ξ. & ſic de cæteris.

PROPOSITIO III.



EAdem figurâ poſitâ:

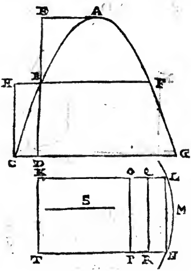
Dico rationem ſolidi ex D E A O in ſe ordinatè, ad ſolidum ex $\chi\eta\psi\theta$ in ſe ordinatè, eſſe ad rationem ſolidi ex $\theta\eta\zeta o$ in ſe ordinatè, ad ſolidnm ex D E A S in ſe ordinatè, ſicut ratio ſolidi

lidi

lidi ex D E AO in ſe ſubalternè, ad ſolidum ex $\chi\eta\phi\theta$ in ſe ſubalternè, eſt ad rationem ſolidi ex $\theta\eta\xi\omega$ in ſe ſubalternè ad, ſolidum ex DEAS in ſe ſubalternè.

Demonſtratio eadem eſt quæ propoſitionis tertiæ, quadraturæ ſecundæ.

PROPOSITIO IV.



Sint iterùm vt prius diametri duæ æquales EB, BD, actiſq; per earum extremitates normalibus BF, CDG;

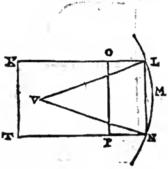
Dico notam eſſe rationem CBD in ſe ſubalternè, ad DBFG in ſe ſubalternè.

Demonſtratio.

POnatur ſegmentum circulare K L M N T, quod ductum in altitudinem S, ſit æquale parti D B F G in ſe ſubalternè, per prop. 8. lib. 3. huius. item ſegmentum O L M N P, quod ductum in eandem altitudinem S, ſit æquale parti C B D in ſe ſubalternè, per eandem propoſ. erit igitur vt ſegmentum O L M N P, ad ſegmentum K L M N T, ita CBD in ſe ſubalternè, ad D B F G in ſe ſubalternè. erigatur iam ex C diameter C H, occurrens F B productæ in H. ponaturque per 8. quad. tertiæ huius, ſegmentum Q L M N R, quod ductum in altitudinem S, ſit æquale

quale C H B in ſe ſubalternè, quoniam igitur per 10. quadr. tertiæ, nota eſt ratio ſegmenti Q L M N R ad ſegmentum K L M N T. nota etiam eſt ratio ſegmenti Q L M N R ad reſiduum rectangulum K Q R T; eſt nota inſuper ratio rectanguli K Q R T, ad rectangulum O Q R P, nota igitur eſt ratio ſegmenti Q L M N R, ad rectangulum O Q R P, igitur & nota eſt ratio ſegmenti O L M N P ad rectangulum O Q R P, adeoque etiam ad ſegmentum Q L M N R. ſed nota eſt ratio ſegmenti Q L M N R ad ſegmētum KLMNT per 1, quadr. 3 igitur nota eſt ratio ſegmenti O L M N P ad ſegmentum K L M N T, hoc eſt, C B D in ſe ſubalternè, ad D B F G in ſe ſubalternè. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO V.



Exponantur ſegmenta duo KLNT, OLMNP, quorum nota eſt facta ratio in propoſ. præced. iunctiſque L, N, ducantur ad V centrum circuli, rectæ L V, N V.

Dico notam eſſe rationem ſectoris V L M N, ad reſiduum triangulum L V N.

Demonſtratio.

Per præced: nota eſt ratio ſegmenti O L M N P, ad ſegmentum K L M N T, igitur nota eſt ratio ſegmenti O L M N P ad reſiduum rectangulum K O P T; ſed ratio huius, ad rectang. O L N P nota eſt, igitur nota eſt ratio ſegmenti O L M N P ad rectangulum O L N P, adeoque & ratio ſegmenti L M N ad rectang. O L N P. at nota eſt ratio rectang. O L N P ad triangulum L V N, igitur & nota eſt ratio ſegmenti L M N ad triangulum L V N, igitur etiam nota eſt ratio ſectoris V L M N ad triangulum L V N. quod erat demonſtr.

FINIS.

ROI 1461591

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

G.41.

Digitized by Google

Digitized by Google